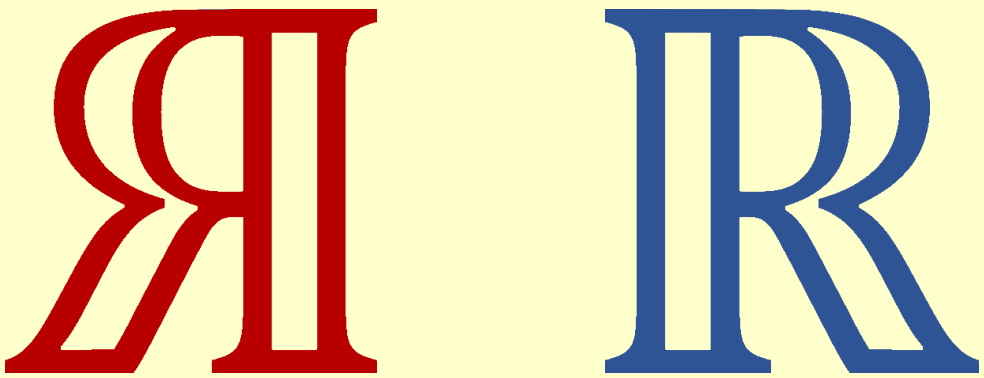
2019

CORNELIA BĂȘCĂU

MULȚIMEA NUMERELOR REALE



Științele educației

EDITURA Agata

Cornelia Băşcău

Mulțimea numerelor reale

EDITURA
Agata®
Botoşani - 2019

Enea Daniela
Mulțimea numerelor reale
Editura Agata, 2019 – versiune online
ISBN: 978-606-692-039-1
www.agata.ro; editura@agata.ro
Director: Ion Istrate
Redactor: Dorina Rodu

Cuprins

Introducere

„Dumnezeu a creat numerele naturale.
Restul este opera omului.”
Leopold Kronecker, matematician german (1823 – 1891)

Numărul reprezintă noţiunea fundamentală pentru construirea întregului univers matematic. Numerele guvernează lumea, viața noastră cea de zi cu zi se bazează pe numere. Ele sunt obiecte matematice, simboluri sau cuvinte folosite în activitatea practică a omului, pentru a cota, a măsura (distanțe, suprafețe etc.) și a eticheta; fără numere nu am putea ști ce dată este, ce oră este; sunt utilizate de la cumpărături, până la astronomie (predicția evenimentelor). Ele au o istorie fascinată. A fost nevoie de mulți ani și de multe minți luminate că omenirea să ajungă la sistemul simplu pe care îl folosește acum. O dată cu evoluția spiritului uman, numărul a început să fie din ce în ce mai prezent în viața oamenilor, iar activitatea practică a omului, de la formele cele mai simple, până la cele mai complicate, cum e cea în cercetarea fenomenelor naturale, a arătat că interpretarea cantitativă a mărimilor necesită o mare bogăţie de numere.

În matematică, definiția de număr a fost extinsă, de-a lungul timpului, pentru a include numere cum ar fi zero, numerele negative, numerele raționale, numerele iraționale, numerele reale etc. După recunoașterea, în secolul al XVI-a, a numerelor negative și fracționare, urmează, prin secolul al XVII-lea, ca matematicienii să folosească notaţia actuală pentru fracția zecimală. Abia în secolul al XIX-lea s-a întreprins studiul ştiinţific al numerelor iraționale. Elaborarea noțiunii matematice de număr real a constituit un proces lung, sinuos, încheiat în jurul anului 1872 prin lucrările matematicienilor K. Weierstrass[1], E. Heine[2], G. Cantor[3] și R. Dedekind[4].

Lucrarea de față cuprinde elemente teoretice legate de mulțimea numerelor reale și aplicații a căror frumusețe și utilitate pot ajuta elevul de gimnaziu sau de liceu în a-și forma o

[1] Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (31.10.1815-19.02.1897), matematician german considerat părintele analizei matematice

[2] Heinrich Heine Eduard (16.03.1821-21.10.1881), matematician german cu contribuții în teoria funcților

[3] Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (03.1845-06.01.1918), matematician german considerat creatorul teoriei moderrne a mulțimilor

[4]Julius Wilhelm Richard Dedekind (06.10.1831-02.12.1916), matematician german cu contribuții la teoria algebrică a numerelor; a pus bazele teoretice riguroase a mulțimii numerelor reale

serie de cunoștinte și deprinderi în studiul matematicii, motiv pentru care am ales această temă. Lucrarea poate fi utilă și profesorilor de matematică din învățământul gimnazial și liceal, atât din punct de vedere științific, cât și metodologic, mai ales ca suport pentru un opțional de matematică.

Lucrarea de faţă se bazează pe „Bazele analizei matematice”, de Constantin Meghea, precum și pe „Analiză Matematică. Note de curs” a domnului conf. univ. dr. Radu Miculescu și este structurată pe șase capitole.

Primul capitol prezintă construcția axiomatică a mulțimii numerelor naturale precum și proprietățile definitorii ale acestei mulțimi.

Capitolul al doilea conţine construcția mulțimii numerelor întregi, definirea operațiilor de adunare, înmulțire și de ordine în $\square$, a relației de divizibilitate și a claselor de echivalență precum și scufundarea lui $\square$ în $\square$.

Capitolul al treilea conține construcția mulțimii numerele raționale, definirea operațiilor pe $\square$, scufundarea lui $\square$ în $\square$, dar și reprezentarea numerelor raționale sub formă de fracții zecimale periodice.

În capitolul al patrulea se prezintă trei din cele mai cunoscute metode pentru construcția mulțimii numerelor reale: construcția prin tăieturi în $\square$, construcția cu ajutorul șirurilor Cauchy și construcția zecimală (acesibilă la nivelul liceului). Pentru fiecare metodă în parte se face construcția lui $\square$, se definesc operațiile algebrice și de ordine, precum și unele proprietăți ale corpului numerelor reale și scufundarea lui $\square$ în $\square$. Capitolul se încheie cu mulțimea numerelor iraționale.

În cel de al cincilea capitol se face o prezentare abstractă a mulțimii numerelor reale, precum și proprietățile definitorii ale acestei mulțimi.

Ultimul capitolul este alcătuit din câteva consideraţii metodice privind predarea noţiunii de număr real în clase gimnaziale și liceale, precum şi o serie de aplicații care să demonstreze importanţa acestor noţiuni.

Exprim, pe această cale, sincere mulţumiri conducătorului ştiinţific, domnului conferenițar universitar doctor Radu Miculescu, pentru substanţialul sprijin şi interesul deosebit acordat în elaborarea acestei lucrări.

CAPITOLUL I. Construcția mulțimii numerelor naturale.

Una din noțiunile fundamentale ale matematicii este aceea de număr natural. Numerele naturale s-au născut din necesitatea practică de a ști și de a comunica în societate și își au originea în cuvintele folosite pentru a număra obiecte, începând cu numărul unu.

Numerele naturale au o semnificaţie concretă directă. Orice număr natural poate fi privit ca rezultat al numărării, oricărui număr natural elevul îi poate asocia imaginea, mai mult sau mai puţin clară, a mulţimii corespunzătoare. Numerele naturale au, într-o anumită măsură, totdeauna un caracter concret. Acelaşi lucru se poate spune și despre fracții.

Constructia axiomatică a numerelor naturale a fost dată pentru prima dată riguros de Giuseppe Peano[5] , în 1889, în lucrarea „Arithmetices principia, nova methodo exposita”. În această lucrare au fost definite ceea ce mai tîrziu s-au numit sistemele Peano (alți istorici ai matematicii le denumesc sisteme Peano-Dedekind pentru a marca și contribuția lui Dedekind la această construcție fundamentală a matematicii).

1.1. Axiomele lui Peano

Se consideră mulțimea $\mathbb{N}$ și o lege $s: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ care asociază oricarui element $n \in \mathbb{N}$ un alt element $n' \in \mathbb{N}$, numit succesorul lui $\mathbb{N}$, astfel încât sunt verificate axiomele:

AP1: Oricare $n \in \mathbb{N}$ are un unic succesor (adică $s: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ data de $s(n) = n'$ este funcție);

AP2: Există un element din $\mathbb{N}$, desemnat prin 1, care are proprietatea că $s(n) \neq 1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ (deci $1 \notin s(\mathbb{N})$);

AP3: s este o funcțe injectivă (adică pentru orice $m, n \in \mathbb{N}, m \neq n$, avem că $s(m) \neq s(n)$);

AP4 (axioma inducției): Dacă $P \subseteq \mathbb{N}$ este o submulţime astfel încât $1 \in P$ și $\forall n \in P$ avem că $s(n) \in P$, atunci $P = \mathbb{N}$.

Folosind cifrele, $s(1)$ se notează 2, $s(2)$ se notează 3,…, $s(8)$ se notează 9. $\mathbb{N}$ este mulțimea numerelor naturale, iar funcția s se numește funcția succesor.

Observație. Dacă π este o proprietate a unui element oarecare al lui $\mathbb{N}$, care este adevarată pentru 1 și care presupusă adevarată pentru $n \in \mathbb{N}$ este adevarată și pentru $s(n)$, atunci

[5] Giuseppe Peano (27.08. 1858 – 20 .04. 1932) matematician italian, fondator al logicii matematice și a teoriei mulțimilor.

π este adevarată pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Astfel se poate vorbi despre demonstrație și definiție prin inducție matematică.

Consecințe:

1. Dacă pentru orice $m,n \in \mathbb{N}$ avem $s(m) = s(n)$, atunci $m = n$.

Demonstrație. Dacă, prin absurd, $m \neq n$, atunci conform cu AP3, $s(m) \neq s(n)$.

2. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \neq s(n)$.

Demonstrație prin inducție după n. Pentru $n = 1$ avem, conform AP2, $s(1) \neq 1$, iar dacă $s(n) \neq n$, atunci, conform cu AP3, $s(s(n)) \neq s(n)$.

3. Pentru orice $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, există $p \in \mathbb{N}$, astfel încât $s(p) = n$ (adică orice număr natural diferit de 1 are un predecesor).

Demonstrație. Fie $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n = s(p), p \in \mathbb{N}\}$ și $E = \{1\} \cup A$, așadar $1 \in E$. Presupunem că $n \in E$. Dacă $n = 1$, atunci $s(1) \in A$, deci $s(1) \in E$, iar dacă $n \in A$, atunci $n = s(p)$, $p \in \mathbb{N}$, deci $s(n) = s(s(p))$ și $s(n) \in A$, $s(n) \in E$, prin urmare, conform AP4, $E = \mathbb{N}$.

1.2. Adunarea pe $\mathbb{N}$

Pentru fiecare cuplu m,n de numere naturale se consideră numărul natural desemnat prin $m+n$ și definit prin inducție după n astfel A1 : $m+1 = s(m)$;

A2 : $s(n)+m = s(n+m)$.

Observaţie. Axiomele A1–A2 poartă numele de axiomele adunării numerelor naturale, iar din definirea adunării numerelor naturale obținem: $1 + 1 = s(1) = 2$.

Proprietățile adunării.

1. Asociativitatea. $m+(n+p) = (m+n)+p, \forall\, m,n,p \in \mathbb{N}$

Demonstrație prin inducție după p. Pentru $p = 1$ avem $m+(n+1) = m+s(n) = s(m+n) = (m+n)+1$. Dacă $m+(n+p) = (m+n)+p$, atunci $s((m+(n+p)) = s((m+n)+p))$, $m+s(n+p) = (m+n)+s(p)$, dar $m+s(n+p) = m+(n+s(p))$.

2. Comutativitatea. $m+n = n+m, \forall\, m,n \in \mathbb{N}$

Demonstrație prin inducție după n. Pentru $n = 1$, avem $m+1 = s(m) = 1+m$. Avem că $s(m) = m+1$ și $s(m) = 1+m$, deorece, prin inducție după m avem $1+1 = s(1)$, dacă $1+m = s(m)$, atunci $s(1+m) = s(s(m))$, iar $s(1+m) = 1+s(m))$. Dacă $m+n = n+m$, atunci $s(m+n) = s(n+m)$, $m+s(n) = n+s(m)$, iar $n+s(m) = n+(m+1) = n+(1+m) = (n+1)+m = s(n)+m$.

3. Proprietatea de simplificare. $m+p = n+p \Rightarrow m = n, \forall\, m,n,p \in \mathbb{N}$

Demonstrație prin inducție după p. Dacă $m+1 = n+1$, avem $s(m) = s(n)$, deci $m = n$. Dacă $m+p = n+p \Rightarrow m = n$, când $s(m+p) = s(n+p)$, $m+p = n+p$, deci $m = n$

4. Avem că $n+p \neq n, \forall\ n,p \in \mathbb{N}$

Demonstrație prin inducție după n. $1+p = s(p) \neq 1$, iar dacă $n+p \neq n$, atunci $s(n+p) \neq s(p+n) = p+s(n) = s(n)+p$.

1.3. Înmulţirea pe $\mathbb{N}$

Pentru fiecare cuplu m, n de numere naturale se consideră numărul natural desemnat prin $m \cdot n$ și definit prin inducție după n astfel I1: $m \cdot 1 = m$;

I2: $m \cdot s(n) = m \cdot n + m$.

Observaţie. I1 şi I2 poartă numele de axiomele înmulţirii numerelor naturale. Dacă nu este pericol de confuzie, se scrie $m \cdot n = mn$, pentru $m, n \in \mathbb{N}$.

Proprietățile înmulțirii.

1. Comutativitatea. $m \cdot n = n \cdot m, \forall\ m,n \in \mathbb{N}$

Demonstraiţe prin inducție după n. Pentru $n = 1$, avem $m \cdot 1 = m$ și, de asemenea, $1 \cdot m = m$ (inducție după m: $1 \cdot 1 = 1$, iar dacă $1 \cdot m = m \cdot 1$, atunci $1 \cdot s(m) = 1m+1 = m+1 = s(m) = s(m)+1$). Dacă $m \cdot n = n \cdot m$, atunci $m \cdot s(n) = mn+m = nm+m$ și rămâne de arătat, prin inducție după m, că $nm+m = s(n) \cdot m$. Pentru $m = 1$, $n \cdot 1+1 = s(n) = s(n) \cdot 1$, iar dacă $nm+m = s(n) \cdot m$, atunci $n \cdot s(m)+s(m) = s((nm+n)+m) = s(s(n) \cdot m+n) = s(n) \cdot m+s(n) = s(n) \cdot s(m)$.

2. Distributivitatea înmulțirii faţă de adunarea numerelor naturale.

$m(n+p) = mn+mp, \forall\ m, n, p \in \mathbb{N}$

Demonstrație prin inducție după p. Pentru $p = 1$ avem $m(n+1) = m \cdot s(n) = mn+m$, iar dacă $m(n+p) = mn+mp$, atunci $m(n+s(p)) = m \cdot s(n+p) = m(n+p)+m = mn+m \cdot s(p)$

3. Asociativitatea. $m \cdot (n \cdot p) = (m \cdot n) \cdot p, \forall\ m,n,p \in \mathbb{N}$

Demonstrație prin inducție după p. Pentru $p = 1$ avem $m \cdot (n \cdot 1) = m \cdot n = (m \cdot n) \cdot 1$. Dacă $m \cdot (n \cdot p) = (m \cdot n) \cdot p$, atunci $m+(n \cdot s(p)) = m \cdot (np + n) = m \cdot (n \cdot p) + m \cdot n = (m \cdot n) \cdot p + m \cdot n = (m \cdot n) \cdot s(p)$.

4. Proprietatea de simplificare. $m \cdot p = n \cdot p \Rightarrow m = n, \forall\ m,n,p \in \mathbb{N}$

Demonstrație prin inducție după p. Dacă $p = 1$, avem $m \cdot 1 = n \cdot 1$, deci $m = n$. Dacă $m \cdot p = n \cdot p \Rightarrow m = n$, atunci $m \cdot s(p) = n \cdot s(p) \Rightarrow m \cdot (p+1) = n \cdot (n+1) \Rightarrow mp+1 = n \cdot p+1 \Rightarrow m \cdot p = n \cdot p$, deci $m = n$.

1.4. Relaţia naturală de ordine pe □

Fie N o mulțime. Orice submulțime nevidă a lui $N \times N$ se numește relație în N. Dacă N este o mulțime și R este o relație binară în N, atunci $(x,y) \in R$ se desemnează prin xRy.

O relație R se numește: reflexivă dacă $\forall x \in N$, $xR\ x$, simetrică dacă $\forall x, y \in N$ astfel încat xRy, implică yRx, antisimetrică dacă xRy și yRx, atunci $x=y$ și tranzitivă dacă pentru $\forall x, y, z \in N$ avem că xRy și yRz, atunci xRz.

O relație în mulțimea N se numește relație de ordine dacă este reflexivă, antisimetrică și tranzitivă. De regulă, se notează $\leq$.

O mulțime nevidă, înzestrată cu o relație de ordine $\leq$, se numește mulțime ordonată, scriem $(N, \leq)$.

Mulțimea ordonată $(N, \leq)$ se numeşte mulțime total ordonată (sau lanț) dacă pentru orice $a, b \in N$, avem $a \leq b$ sau $b \leq a$ (adică oricare două elemente sunt comparabile).

Fie $(N, \leq)$ o mulțime ordonată şi $N_0 \subseteq N$. Elementul $a \in N$ se numeşte minorant (majorant) pentru N_0 dacă pentru orice $x \in N_0$, avem $a \leq x$ $(x \leq a)$. Elementul $a \in N$ se numește margine inferioară (superioară) a lui N_0 și este notat inf N_0 (sup N_0) dacă a este minorant (majorant) pentru N_0 și pentru orice $a' \in N$ minorant (majorant) pentru N_0 avem $a' \leq a$ $(a \leq a')$. Dacă există, inf N_0 şi sup N_0, atunci aceste elemente sunt unic determinate de condiţiile din definiție.

Un element $a_0 \in N_0$ se numeşte element iniţial (element final) în N_0 dacă pentru orice $x \in N_0$, avem $a_0 \leq x$ $(x \leq a_0)$. Dacă a_0 este element iniţial (final) atunci $a_0 = \inf N_0$ (sup N_0).

Un element $a_0 \in N_0$ se numește element minimal (element maximal) în N_0 dacă din $x \leq a_0$ $(a_0 \leq x)$ şi $x \in N_0$ rezultă $x = a_0$. Un element iniţial (final), este și element minimal (maximal), dar nu și invers. În plus, nu este asigurată unicitatea elementului minimal (maximal).

O mulțime ordonată se numește mulțime inductiv ordonată, dacă orice lanţ al ei admite majorant.

Lema lui Zorn. O mulțime inductiv ordonată are cel puţin un element maximal.

O relație de ordine $\leq$ pe mulțimea nevidă N se numește completă, dacă pentru orice submulțime nevidă majorată N_0 a lui N există sup N_0. Spunem că mulțimea $(N, \leq)$ este complet ordonată.

O mulțime ordonată se numește bine ordonată dacă orice submulțime nevidă a sa are prim element (cel mai mic element).

Teoremă. Oricare ar fi numerele naturale m și n, avem una și numai una dintre $m = n$, $m = n+p$, $n = m+q$, $p, q \in \mathbb{N}$.

Demonstrație. Existența. Inducție după n. Pentru $n = 1$, dacă $m \neq 1$, atunci $m = s(p) = p+1 = p+n = n+p$, $p \in \mathbb{N}$. Presupunem că $n = m$, fie $m = n+p$, fie $n = m+q$ și demonstrăm pentru $s(n)$. Când $m = n$, $s(n) = s(m) = m+1$. Când $m = n+p$, dacă $p = 1$, $m = s(n)$, iar dacă $p \neq 1$, cum $p = s(t)$, $t \in \mathbb{N}$, $m = n+s(t) = s(n)+t$. Când $n = m+q$, $s(n) = m+s(q)$.

Unicitatea. Cum $n+p \neq n$ și $m+q \neq m$, rămâne să demonstrăm că $m = n+p$ și $n = m+q$ sunt incompatibile. Dacă, prin absurd, am avea că $m = n+p$ și $n = m+q$, atunci $n = n+(p+q)$, contradicție.

Spunem că $m \in \mathbb{N}$ este mai mic decât $n \in \mathbb{N}$, fapt care va fi notat prin $m < n$, dacă există $p \in \mathbb{N}$ astfel încât $n = m+p$.

Pe $\mathbb{N}$ introducem relația $\leq$ dată de echivalență $n \leq m$, dacă și numai dacă $n < m$ sau $n = m$ (vom spune că n este mai mic sau egal decât m sau că m este mai mare sau egal decât n). Relația $\leq$ este: reflexivă (orice $n \in \mathbb{N}$, avem că $n = n$, deci $n \leq n$), antisimetrică ($m, n \in \mathbb{N}$ astfel încât $m \leq n$ și $n \leq m$, atunci avem că $m = n$) și tranzitivă ($m, n, p \in \mathbb{N}$ astfel încât $m \leq n$ și $n \leq p$, atunci $m \leq p$), adică este o relație de ordine.

Prin urmare, conform teoremei de mai sus, mulțimea $\mathbb{N}$ împreună cu relația de ordine $\leq$ este o mulțime total ordonată.

Proprietăți.

1. $m < n \Rightarrow m + p < n + p$ și $m < n \Rightarrow mp < np$, $\forall m, n, p \in \mathbb{N}$

2. Dacă $m, n \in \mathbb{N}$ şi $m < n$, atunci $m+1 \leq n$.

Demonstrație. Deoarece $m < n$, există $p \in \mathbb{N}$ astfel încât $m+p = n$. Când $p = 1$, $m+1 = n$, iar când $p \neq 1$, $p = s(q)$, $q \in \mathbb{N}$, deci $n = m+s(q) = m+1+q$ adică $m+1 < n$.

3. $1 \leq n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (adică cel mai mic element al lui $\mathbb{N}$ este 1).

Demonstrație. Oricare $n \in \mathbb{N}$, dacă $n \neq 1$, atunci $n = s(p) = 1+p$, $p \in \mathbb{N}$.

Corolar. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n < s(n)$.

Teoremă. Mulțimea $\mathbb{N}$ este bine ordonată prin relația $\leq$.

Demonstrație. Trebuie să demonstrăm că orice submulţime nevidă $N \subseteq \mathbb{N}$ are un cel mai mic element, adică există $a \in N$ astfel încât $a \leq x$, pentru orice $x \in N$. Dacă $1 \in N$, atunci demonstrația

este terminată. Dacă $1 \notin N$, fie $S = \{n \in \square \mid n < x, \forall x \in N\}$ Evident 1∈*S*. Există *p*∈*S* astfel încât $p+1 \notin S$ căci altfel S = $\square$ (conform AP4), de unde, luând $x \in N$ (*N* este nevidă), rezultă contradicția $x < x$. Cum $p+1 \notin S$, există $a \in N$ astfel încât $a \leq p+1$. Deoarece $p \in S$, se deduce $p < x, \ \forall x \in N$, deci $p+1 \leq x, \ \forall x \in N$. În particular avem $p+1 \leq a$. Deci $a = p+1$, prin urmare $a \leq x, \ \forall x \in N$. Cum $a = p+1 \in N$ atnci el este cel mai mic element din *N*.

Propoziție. O mulțime de numere naturale *A*, care conține pe *a* și astfel că, oricare ar fi numărul natural $n > a$, dacă $[a, n) \subset A$ atunci $n \in A$, conține toate numerele naturale mai mari decât *a*.

Demonstrație. Presupunem, prin absurd, că $B = \{n \in \square \mid n > a, n \notin A\}$ nu este vidă și fie *p* cel mai mic element al lui *B*. Intervalul [*a*, *p*) din $\square$ este inclus în *A* (altfel $\exists q \in \square, a < q < p, q \notin A \Rightarrow q \in B$, contradicție, căci $q < p$), prin urmare, conform cu ipoteza, $p \in A$, contradicție.

Corolar. O mulțime de numere naturale *A*, care conține pe *a* și care, odată cu fiecare *n* din *A*, conține și pe *s*(*n*), conține toate numerele naturale mai mari decât *a*.

Doua mulțimi *E* și *F* se numesc <u>echipotente</u> dacă există o funcțe bijectivă $f : E \to F$ Se notează $E \square F$

Proprietate. Fie [1*;* *n*+1] un interval din $\square$. Mulțimea [1, *n*+1]\{*a*}, $a \in [1, n+1]$ este echipotentă cu intervalul [1, *n*] din $\square$ (adică au același număr de elemente).

Demonstrație prin inducție după *n*. Proprietarea este adevarată pentru *n* = 1. Presupunem adevarată pentru *n* și fie $a \in [1, n+2]$. Dacă $a = n+2$, atunci avem [1, *n*+2]/{*a*}$\square$ [1, *n*+1], iar dacă $a \neq n+2$, atunci conform ipotezei de inducție, avem [1, *n*+1]\{*a*}$\square$ [1, *n*], deci, asociind pe *n*+2 cu *n*+1, avem [1, *n*+2]\{*a*}$\square$ [1, *n*+1].

O mulțime *N*, care este fie vidă, fie echipotentă cu intervalul [1, *n*] din $\square$, se numește mulțime <u>finită.</u> În al doilea caz, *n* se numește numărul elementelor lui *N*.

Proprietăți.

1. Intervalele [1, *n*] și [1, *p*] din $\square$ sunt echipotente dacă și numai dacă *n* = *p*.
2. Orice parte a unei mulțimi finite este finită.
3. Fie *N* o mulțime finită și *A* o parte a lui *N*. Dacă *A*$\square$ *N*, atunci *A* = *N*.
4. Orice parte finită nevidă a unei mulțimi ordonate are un element minimal.

O mulțime care nu este finită se numește <u>infinită</u>.

Propoziție. Mulțimea $\mathbb{N}$ este infinită.

Demonstrație. Presupunem prin absurd că există o funcțe $f:\mathbb{N}\to[1,n]$, bijectivă, unde [1, *n*] este un interval din $\mathbb{N}$. Notăm $A = f([1, n])$. Atunci $A \sqcup [1, n]$ și cum $A \subset [1, n]$, avem $A = [1, n]$, contradicție deoarece f fiind injectivă $A \neq [1,n]$.

1.5. Divizibilitate în $\mathbb{N}$

Fie $a, b \in \mathbb{N}$. Vom spune că *a* este, prin definiție, <u>divizibil</u> prin *b*, dacă există $c \in \mathbb{N}$ astfel încât $a = bc$ (notăm $a|b$). În acest caz, vom spune că *b* este un <u>divizor</u> al lui *a* sau că *a* este <u>multiplu</u> al lui *b*.

Proprietăți. Dacă *a,b,c* și *m,n* sunt numere naturale, atunci avem:

1. $a|1$ și $a|a$;
2. $a \mid b \Leftrightarrow ac \mid bc$;
3. Dacă $a \mid b$ și $b \mid c \Rightarrow a \mid c$;
4. $a \mid b$ și $b \mid a \Leftrightarrow a = b$;
5. $a \mid c, b \mid c \Leftrightarrow (ma + nb) \mid c$;
6. $(a+b) \mid c, a \mid c \Leftrightarrow b \mid c$

În mod evident, relația de divizibilitate de pe $\mathbb{N}$ este reflexivă, antisimetrică și tranzitivă, adică mulțimea $\mathbb{N}$ împreună cu relația |, este o mulțime parţial ordonată.

Un număr $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$ se zice <u>prim</u> dacă singurii săi divizori sunt 1 și *p*. Cele mai mici numere prime sunt 2, 3, 5, 7, etc.

Fie două numere $a, b \in \mathbb{N}$. Un număr $d \in \mathbb{N}$ se numește <u>cel mai mare divizor</u> al lui *a* și *b*, notat $d = (a,b)$, dacă:

a) $a|d$ și $b|d$,

b) oricare $d' \in \mathbb{N}$ astfel încât $a|d'$ şi $b|d'$, atunci $d| d'$.

Dacă pentru $a, b \in \mathbb{N}$ avem $(a, b)=1$, vom spune despre *a* şi *b* că sunt <u>prime între ele</u>.

Teoremă. Orice pereche de numere $a, b \in \mathbb{N}$ are un singur cel mai mare divizor comun.

Demonstrație. Existența. Se folosește algoritmul lui Euclid ce va fi prezentat în capitolul următor.

Unicitatea. Fie d_1 și d_2 doi cel mai mare divizor comun pentru *a* și *b*. Atunci $d_1|d_2$ și $d_2|d_1$, deci $d_1 = d_2$.

Exemple: Dacă $a = 49$ și $b = 35$ avem: $49 = 1\cdot35+14$ ($c_1 = 1$, $r_1 = 14$), $35 = 2\cdot14+ 7$ ($c_2 = 2$, $r_2 = 7$), $14 = 2\cdot7$ ($c_3 = 2$, $r_3 = 0$) de unde deducem că $(49, 35) = 7$.

Dacă $a = 187$ și $b = 35$ avem: $187 = 5\cdot35+12$ ($c_1 = 5$, $r_1 = 12$), $35 = 2\cdot12+ 11$ ($c_2 = 2$, $r_2 = 11$), $12 = 1\cdot11+1$ ($c_3 = 1$, $r_3 = 1$) de unde deducem că $(187, 35) = 1$.

Proprietăți. Fie a,b,c și p numere naturale. Atunci avem:

1. $(a,b)\ c = (ac,bc)$

Demonstrație. Punem $(a,b) = d$, $(ac,bc) = d'$. Cum $a|d$ și $b|d$, avem $ac|dc$ și $bc|dc$, deci $d'|dc$; $d'|c$, adică $d' = cd''$ și cum $ac|d'$ și $dc|d'$, avem $a|d'', b|d''$, deci $d|d'', dc|d'$ Prin urmare $d'|dc$ și $dc|d'$, adică $dc = d'$.

2. $ab|c$ și $(a,c) = 1 \Rightarrow b|c$.

Demonstrație. $(a,c) = 1 \Rightarrow (ab,cb) = b$ și cum $ab|c$ și $cb|c$, avem $b|c$.

3. Dacă p prim, $p > 1$, $(a,p) = 1 \Rightarrow a \nmid p$

Demonstrație. Dacă $(a,p) = d > 1$, atunci, cum $p|d$, $p = d$ și $a|p$, contradicție.

4. Fie $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{Z}$ și p prim. Dacă $a_1a_2...a_n \mid p \Rightarrow \exists i \in \mathbb{N}$ astfel încât $a_i \mid p$.

Demonstrație. Inducție după n. Evident pentru $n = 1$, $a_1 \mid p$. Dacă $a_1a_2...a_n \mid p$, atunci din $a_1a_2...a_na_{n+1} \mid p, (a_1a_2...a_n, p) = 1 \Rightarrow a_{n+1} \mid p$.

5. Dacă $a|b$, $b|c$ și $(b,c)=1$, atunci $a|bc$.

Demonstrație. $(ab,ac)= a$ și cum $ab|bc$ și $ac|bc$, avem $a|bc$.

Teoremă. Orice număr natural $a > 1$ are o singură descompunere într-un produs de factori primi diferiți de 1.

Demonstrație. Fie $a \in \mathbb{N}$, $a > 1$. Dacă a nu este prim, putem scrie $a = bc$, cu $1<b<a$, $1<c<a$. Prin urmare, repetând și grupând factorii, există numerele naturale prime $p_1, ..., p_m > 1$, astfel încât $a = p_1^{k_1} ... p_m^{k_m}$ cu $k_1, ..., k_m \in \mathbb{N}$. Fie $a = q_1^{l_1} ... q_r^{l_r}$ o altă descompunere a lui a într-un produs de factori primi diferiți de 1. Din $p_1^{k_1} ... p_m^{k_m} = q_1^{l_1} ... q_r^{l_r}$, cum $p_1 \mid q_1^{l_1} ... q_r^{l_r}$, , conform proprietății 4, $\exists q_i$ și putem presupune $q_1 \mid p_1$, deci $q_1 = p_1$ și deci, printr-o numerotare potrivită $q_i = p_i, 1 \le i \le m$, deci $m = r$ și $k_i = p_i, 1 \le i \le m$.

Fie $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{Z}$. Un număr natural d astfel că $a_i \mid d, 1 \le i \le n$ și $a_i \mid h, 1 \le i \le n \Rightarrow d \mid h$ se numește cel mai mare divizor comun al numerelor $a_1, a_2, ..., a_n$

Un număr natural *m* astfel că $m \mid a_i, 1 \le i \le n$ și $h \mid a_i, 1 \le i \le n \Rightarrow h \mid m$ se numește cel mai mic multiplu comun al numerelor $a_1, a_2, ..., a_n$.

Avem relația: $a_1 a_2 ... a_n = md$.

Teoremă. Mulțimea numerelor prime este infinită.

Demonstrație. Fie, prin absurd, *p* cel mai mare număr prim. Se consideră numărul *n* = *q*+1, unde *q* este produsulul tuturor numerelor prime. *n* nu este prim deoarece *n* > *p*, deci există un număr prim *l*, *l* > 1, astfel încât *n*|*l*, ori *q*|*l*, prin urmare 1|*l*, contradicție.

CAPITOLUL II. Construcția mulțimii numerelor întregi

Necesitatea considerării numerelor negative apare din considerente practice, pentru a caracteriza mărimile ce pot fi socotite în două sensuri: avere și datorie, spre dreapta și spre stânga etc, pentru a modela situaţii precum: temperaturi negative, datorii în conturi bancare etc., dar și din considerente matematice: diferenţa a două numere naturale nu este întotdeauna definită ca un număr natural. Formulat altfel, nu pentru orice $a, b \in \square$ ecuaţia $x + a = b$ are soluții $x \in \square$.

Numerele negative au apărut ca rezultate ale scăderii, ca soluţii ale unor probleme, dar ele nu s-au impus definitiv decât din momentul în care li s-a putut da o interpretare concretă. Ideea de număr negativ apare, într-o anumită măsură, la Diofante (sec. III e.n.). El vorbeşte de numere de scăzut (negative), spre deosebire de numerele de adunat (pozitive); el dă chiar regula de înmulţire a două numere negative, dar la el numărul negativ nu apare independent, ci ca scăzător.

Numerele negative apar, sub o formă clară, pentru prima data, la algebriştii din India. Ei folosesc aceste numere pentru a exprima lungimile unor segmente de pe aceeaşi dreaptă, socotite într-un sens sau altul. Şi arabii considerau soluțiile negative ca inacceptabile. Nici primii algebrişti europeni nu-l depăşesc pe Diofante. În cursul dezvoltării algebrei se înregistrează oscilaţii. Astfel, Leonardo din Pisa (sec. XIII), într-o problemă de asociaţie care duce la o soluție negativă, consideră problema imposibilă, dar adaugă că problema ar avea un sens, dacă partea unuia dintre asociaţi ar fi o datorie. Unii algebrişti din sec. al XVI-lea, ca, de exemplu, matematicianul italian G.Cardano, admit şi rădăcini negative (numere fictive) ale ecuațiilor (tot el stabilește și regula semnelor), spre deosebire de numerele adevărate, dar marele algebrist Fr.Vieté (sec. XVII) nu admite soluții negative. Până și Descartes (sec. XVII), care este considerat ca întemeietorul geometriei analitice, foloseşte numai ordonate negative, nu și abscise negative – deci numerele negative numai ca rezultate, nu ca date, iar literele pot lua, în general, numai valori pozitive.

Numerele negative au apărut definitiv în matematică abia în sec. al XIX-lea.

2.1. Mulțimea $\square$

Fie N o mulțime și R o relație în N (dacă pentru elementele x și y are loc xRy, spunem că x și y sunt echivalente modulo R). Relația R se numește relație de echivalență dacă este reflexivă, simetrică și tranzitivă. Dacă R este o relație de echivalență în N și x un element din

N, mulțimea $\bar{x} = \{y \in N \mid xRy\}$ se numește clasă de echivalenţă a lui x după R. Mulțimea claselor de echivalenţă în raport cu relația R se numește mulţimea cât (factor) a lui N în raport cu R și se notează cu N/R. Deci $N/R = \{ \bar{x} \mid x \in N\}$. Funcția $p : N \to N/\square$, dată de $p(x) = x$, pentru orice $x \in N$ se numește surjecţia canonică generată de $\sqcup$

Fie R o relație de echivalenţă pe mulțimea N. Spunem că submulţimea $P \subseteq N$ este un sistem de reprezentanţi pentru clasele de echivalenţă (modulo R), dacă orice element din N este echivalent modulo R cu exact un element din P. Intuitiv, un sistem de reprezentanţi se obţine „alegând” din fiecare clasă de echivalenţă câte un element („reprezentantul” clasei respective). Astfel P este sistem de reprezentanţi dacă şi numai dacă $\forall x \in N$, $\exists\, y \in P$, astfel încât dacă xRy și $\forall y, z \in P$ din yRz să avem $y = z$.

În mulțimea $\square \times \square$ se definesc o adunare: $(m, n) + (m', n') = (m+m', n+n')$ și o înmulțire: $(m, n)(m', n') = (mm'+nn', m n'+m'n)$. Aceste operații binare iau valori în $\square \times \square$, sunt asociative, comutative și înmulțirea este distributivă față de adunare, proprietăți ce se obțin din proprietățile adunării și înmulțirii din $\square$.

Pe mulțimea $\square \times \square$ se consideră relația binară $\sim$, definită prin:
$\forall (a, b), (c, d) \in \square \times \square$, $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a+d = b+c$. Demonstrăm că aceasta este o relație de echivalenţă.

Reflexivitatea. Evident $(a, b) \sim (a, b)$.

Simetria. Dacă $(a, b) \sim (c, d)$, avem că $(c, d) \sim (a, b)$

Tranzitivitatea. Fie $(a, b) \sim (c, d)$ și $(c, d) \sim (e, f)$, atunci $a+d = b+c$ și $c+f = d+e$ și adunând $a+d+c+f = b+c+d+e$, rezultă $a+f = b+e$, adică $(a, b) \sim (e, f)$.

Pornind de la operațiile de adunare și înmulțire din $\square$, se definesc operațiile de adunare și înmulțire pe mulțimea factor $\square \times \square /\sim$, folosind reprezentanți oarecare. Pentru aceasta, notăm cu $\overline{(a, b)} \in \square \times \square /\sim$ clasa lui $(a, b) \in \square \times \square$ și cu $\overline{(c, d)} \in \square \times \square /\sim$ clasa lui $(c, d) \in \square \times \square$.

Definim $\overline{(a, b)} + \overline{(c, d)} = \overline{(a+c, b+d)}$, unde $a+c$ semnifică suma în $\square$ a numerelor naturale a şi c. Ea este corect definită. Aceasta înseamnă că, $\forall (a,b), (c,d) \in \square \times \square$ cu $(a, b) \sim (a', b')$ şi $(c, d) \sim (c', d')$, atunci $(a+ c, b+ d) \sim (a'+ c', b'+ d')$. Verificarea constă în aplicarea definiţiilor relaţiei de echivalenţă şi a operaţiei de $+$.

Definim $\overline{(a,b)}\cdot\overline{(c,d)}=\overline{(ac+bd,ad+bc)}$, unde *ac* semnifică produsul în $\mathbb{N}$ a numerelor naturale *a* și *c*. Ea este corect definită. Aceasta înseamnă că,$\forall(a,\ b),(c,\ d)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ cu $(a,\ b)\sim(a',\ b')$ şi $(c,\ d)\sim(c',\ d')$, atunci $(ac+bd,ad+bc)\sim(a'c'+b'd',a'd'+b'c')$. Verificarea constă în aplicarea definiţiilor relației de echivalenţă şi a operaţiei $\cdot$.

Mulțimea factor $\mathbb{N}\times\mathbb{N}/\sim$ înzestrată cu adunarea și înmulțirea mai sus definite se numește mulțimea numerelor întregi și se notează cu $\mathbb{Z}$ (notaţia $\mathbb{Z}$ provine de la cuvîntul german zahl care înseamnă număr); elementele ei se numesc numere întregi (adică un număr întreg este o clasă de echivalenţă în raport cu această relație).

2.2. Adunarea pe $\mathbb{Z}$

Propoziție. Dubletul ($\mathbb{Z}$,+) formeaza grup abelian (grupul aditiv al numerelor întregi).

Demonstrație. Fie $\alpha=\overline{(a,\ b)},\alpha'=\overline{(a',\ b')},\alpha''=\overline{(a'',\ b'')}$ din $\mathbb{N}$. Operaţia de adunare definită mai sus ia valori în $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ și este asociativă, adică $\alpha+(\alpha'+\alpha'')=(\alpha+\alpha')+\alpha''$, $\forall\ \alpha,\alpha',\alpha''\in\mathbb{Z}$ și comutativă, adică $\alpha+\alpha'=\alpha'+\alpha$, $\forall\ \alpha,\ \alpha'\ \in\mathbb{Z}$.

Elementele (*a, a*), unde $a\in\mathbb{N}$, formează o clasă de echivalență, căci

$\forall x,y\in\mathbb{N},(x,x)\ \square\ (y,y),$ iar daca $(x,x)\ \square\ (y,z),$ atunci $y=z.$ Elementele $(a,a)\overset{not}{=}0$. Avem $\alpha+0=0+\alpha=\alpha$, oricare $\alpha\in\mathbb{Z}$ (0 este element neutru la adunare) .

Pentru fiecare $\alpha\in\mathbb{Z}$, definim $-\alpha$ clasa de echivalență a elementelor (*b ,a*), unde (*a, b*) este un element din α . Definiția este corectă, căci dacă (*a', b'*) $\in\alpha$, atunci (*b, a*) ~ (*b', a'*). Avem $\alpha+(-\alpha)=(-\alpha)+\alpha=0$, oricare $\alpha\in\mathbb{Z}$, deci $-\alpha$ este opusul lui α .

2.3. Înmulțirea pe $\mathbb{Z}$

Propoziție. **($\mathbb{Z}$, +, ·)** este domeniu de integritate (inel comutativ şi unitar, fără divizori ai lui 0).

Demonstrație. Conform celor de mai sus ($\mathbb{Z}$, +) este grup comutativ. Să demonstrăm acum că ($\mathbb{Z}$, ·) este monoid comutativ. Fie $\alpha=\overline{(a,\ b)},\alpha'=\overline{(a',\ b')},\alpha''=\overline{(a'',\ b'')}$ din $\mathbb{N}$. Operaţia de înmulțire astfel definită ia valori în $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

Asociativitatea. Avem $\alpha\left(\alpha'\alpha''\right)=\left(\alpha\alpha'\right)\alpha'',\forall\alpha,\alpha',\alpha''\in\mathbb{Z}$

$\alpha(\alpha'\alpha'')=(a,\ b)(a'a''+b'b'',\ a'b''+b'a'')=$

$= (a(a'a'' + b'b'') + b(a'b'' + b'a''), a(a'b'' + b'a'') + b(a'a'' + b'b''))=$

$= (aa'a'' + ab'b'' + a'bb'' + a''bb', aa'b'' + aa''b' + a'a''b + bb'b'')$, iar $(\alpha\,\alpha')\alpha'' =$

$= (aa' + bb', ab' + a'b)(a'', b'') = ((aa' + bb')a'' + (ab' + a'b)b'', (aa' + aa')b'' + (ab' + a'b)a'')$

$= (aa'a'' + ab'b'' + a'bb'' + a''bb', aa'b'' + aa''b' + a'a''b + bb'b'')$, de unde se deduce că $\alpha(\alpha'\alpha'') = (\alpha\alpha')\alpha''$.

Element neutru. Clasa de echivalență $(a+1, a) \overset{not}{=} 1$, $a \in \mathbb{Z}$. Dacă $(a, b) \in \alpha$, atunci $(a, b)(a+1, a) \sim (a, b)$, deci avem $\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha, \forall\, \alpha \in \mathbb{Z}$.

Comutativitatea. Evident, $\alpha\alpha' = \alpha'\alpha, \forall \alpha', \alpha \in \mathbb{Z}$

Distributivitatea înmulțirii față de adunarea numerelor întregi.

Avem $\alpha(\alpha' + \alpha'') = (a, b)(a' + a'', b' + b'') = (a(a' + a'') + b(b' + b''), a(b' + b'') + b(a' + a''))=$

$= (aa' + aa'' + bb' + bb'', ab' + ab'' + ba' + ba'')$ iar $\alpha\alpha' + \alpha\alpha'' = (a, b)(a', b') + (a, b)(a'', b'') =$

$= (aa' + bb', ab' + ba') + (aa'' + bb'', ab'' + ba'') = (aa' + bb' + aa'' + bb'', ab' + ba' + ab'' + ba'')$ de unde $\alpha(\alpha' + \alpha'') = \alpha\alpha' + \alpha\alpha''$.

Am demonstrat că $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ este un inel comutativ unitar.

Inelul $\mathbb{Z}$ nu are divizori ai lui zero. Fie $\alpha\alpha' = 0 = (0, 0)$, cu $\alpha, \alpha' \in \mathbb{Z}$, $\alpha \neq 0$ și $(a, b) \in \alpha, (a', b') \in \alpha'$. Presupunem $\alpha' \neq 0$. Deci $a \neq b$ și $a' \neq b'$. Fie, de exemplu $a < b$ și $a' < b'$, deci $b = a + r$, $b' = a' + s$, $r, s \in \mathbb{N}$. Din $\alpha\,\alpha' = 0$, avem că $aa' + bb' = ab' + a'b$, de unde înlocuind, obținem $aa' + (a+r)(a'+s) = a(a'+s) + a'(a+r)$, adică $aa' + ra' + rs = a'a + a's$ contradicție. Deci $\alpha\alpha' = 0$

Proprietăți.

1. $\alpha\, 0 = 0, \forall \alpha \in \mathbb{Z}$
2. $\alpha(-\beta) = -\alpha\,\beta, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}$
3. $(-\alpha)(-\beta) = \alpha\,\beta, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}$
4. $\alpha\,\beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ sau $\beta = 0, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}$
5. $\alpha + \gamma = \beta + \gamma \Rightarrow \alpha = \beta, \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$
6. $\alpha\gamma = \beta\gamma, \gamma \neq 0 \Rightarrow \alpha = \beta, \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$

2.4. Relația de ordine pe $\mathbb{Z}$

Elementele lui $\mathbb{Z}$ diferite de 0 sunt mulțimile de forma $\{(n+r,r) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ sau $\{(n,n+s) \mid n \in \mathbb{Z}\}$, unde $r,s \in \mathbb{N}$

Spunem că $\alpha = (a,b) \in \mathbb{Z}$ este pozitiv dacă $a > b$, adică dacă $\exists r \in \mathbb{N}$ astfel încât $a = b+r$, deci $\alpha = \{(n+r,n) \mid n \in \mathbb{N}\}$

Spunem că $\alpha = (a,b) \in \mathbb{Z}$ este negativ dacă $a < b$, adică dacă $\exists s \in \mathbb{N}$ astfel încât $b = a+s$, deci $\alpha = \{(n,n+s) \mid n \in \mathbb{N}\}$

Observații.

1. Orice număr întreg este fie 0, fie pozitiv, fie negativ.
2. Suma și produsul a doua numere pozitive sunt pozitive.

Spunem că numărul întreg α este mai mic decât numărul întreg β și notăm $\alpha < \beta$, dacă există un număr întreg pozitiv γ astfel încât $\alpha + \gamma = \beta$.

Proprietate. Relația $<$ este o relație de ordine strictă, adică oricare $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$, avem $\alpha \not< \alpha$; dacă $\alpha < \beta$, atunci $\beta \not< \alpha$ și dacă $\alpha < \beta$, $\beta < \gamma$, atunci $\alpha < \gamma$

Pentru α, $\beta \in \mathbb{Z}$ relaţia dată de $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$ sau $\alpha = \beta$ este o relație de ordine totală, adică pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, dacă γ este soluția ecuației $\alpha + x = \beta$, în grupul $\mathbb{Z}$, atunci fie γ=0, fie γ>0, fie γ<0, prin urmare fie $\alpha = \beta$, fie $\alpha > \beta$, fie $\alpha < \beta$.

Proprietăți. Pentru $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$, avem:

1. $\alpha > 0 \Leftrightarrow \alpha$ este pozitiv
2. $\alpha < 0 \Leftrightarrow \alpha$ este negativ
3. $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma < \beta + \gamma$
4. $\alpha < \beta, \gamma > 0 \Rightarrow \alpha\gamma < \beta\gamma$
5. $\alpha < \beta, \gamma < 0 \Rightarrow \alpha\gamma > \beta\gamma$.

Proprietăți. Fie α, β, $\delta \in \mathbb{Z}$ astfel încât $\alpha \leq \beta$. Atunci au loc relațiile:

1. $-\beta \leq -\alpha$
2. Dacă $\delta \geq 0$, atunci $\alpha\ \delta \leq \beta\ \delta$
3. Dacă $\delta \leq 0$, atunci $\alpha\ \delta \geq \beta\ \delta$.

Scufundarea lui $\mathbb{N}$ în $\mathbb{Z}$

Fie funcția $f:\square \to \square$, $f(n)=\alpha$, unde α este clasa de echivalență a elementului $(p+n,n)$, $p\in\square$

Oricare $m,n\in\square$ funcția f are proprietățile:

$$f(m+n)=f(m)+f(n)$$

$$f(mn)=f(m)f(n)$$

$$\text{dacă } m<n\Rightarrow f(m)<f(n)$$

Prin urmare funcția f este injectivă și, deci, putem identifica $m\in\square$ cu $f(m)\in\square$. Așadar, f este o scufundare a lui $\square$ în $\square$.

Mulțimea numerelor întregi mai mari sau egale cu 0 se noteaza $\square_+$.

Numărul natural *a* se poate identifica cu clasa de echivalenţă *a* lui (*a*, 0) (lucru permis de faptul că aplicaţia care duce *a* în (*a*, 0) este injectivă de la $\square$ la $\square \times \square$ /∼; notăm cu −*a* clasa de echivalenţă a lui (0, *a*). Prin urmare, putem defini mulțimea $\square = \{(a, 0) \mid a \in \square\} \cup \{0\} \cup \{(0, a) \mid a \in \square\}$, mulțime ce este sistem de reprezentanţi adică dacă $a \geq b$, atunci $(a, b) \sim (a-b, 0)$, iar dacă $a < b$, atunci $(a, b) \sim (0, b-a)$. Deci, putem scrie: $\square = \square \cup \{0\} \cup \{-a \mid a \in \square\}$.

Ţinând cont de acestea, putem scrie pe $\square$ sub forma {0 , ±1 , ±2 , ….}. Notăm $\square^* = \square \setminus \{0\}$.

Propoziție. Mulțimea $\square$ este numărabilă (adică există o bijecție între $\square$ și $\square$).

Demonstrație. Ținând cont de faptul că funcția $f:\square \to \square$, $f(n)=\alpha$ este injectivă și din scrierea lui $\square = \square \cup \{0\} \cup \{-a \mid a \in \square\}$, avem că *f* este bijectivă, adică $\square$ este numărabilă.

2.5. Divizibilitatea în $\square$

Funcţia valoare absolută (sau modul) se definește astfel:

$$|x|: \square \to \square,\ |x| = \begin{cases} x, \text{daca } x \geq 0 \\ -x, \text{daca } x < 0 \end{cases}$$

Avem $x \leq |x|, |-x| = |x|, \forall x \in \square$.

Proprietăți.

1. $|x| \geq 0, |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0, \forall x \in \square$
2. $|x+y| \leq |x| + |y|, \forall x, y \in \square$

3. $|xy|=|x||y|, \forall x, y \in \mathbb{Z}$. Dacă $y \neq 0$, atunci $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

Fie $a, b \in \mathbb{Z}$ .Vom spune că a este, prin definiție, divizibil prin b, dacă există $c \in \mathbb{Z}$, astfel încât $a=bc$ (notăm $a|b$). În acest caz, vom spune că b este un divizor al lui a sau că a este multiplu al lui b.

Dacă $a|b$ și $a \neq 0$, atunci $|a| \geq |b|$.

Se verifică imediat că dacă $a, b, c \in \mathbb{Z}$, atunci :

1. Reflexivitatea: $a|a$ $(a \neq 0)$
2. Dacă $a|b$ şi $b|a$, atunci $a = \pm b$ (deci în $\mathbb{Z}$ relaţia de divizibilitate nu mai este antisimetrică).
3. Tranzitivitatea. Dacă $a|b$ şi $b|c$, atunci $a|c$.
4. $a \mid b \Leftrightarrow ac \mid bc$;
5. $a \mid c, b \mid c \Leftrightarrow (ma+nb) \mid c$;
6. $(a+b) \mid c, a \mid c \Leftrightarrow b \mid c$

Definiție. Un inel integru A împreună cu o funcțe $f : A \to \mathbb{N}$ se numește <u>inel euclidian</u> dacă au loc urmatoarele două proprietăți:

E1: Oricare ar fi elementele nenule $a, b \in A$, astfel încât a să dividă pe b, rezultă $f(a) \leq f(b)$.

E2. Pentru oricare $a, b \in A$, $b \neq 0$ există $q, r \in A$, astfel încât $a = bq + r$, unde $r = 0$ sau $f(r) < f(b)$.

$\mathbb{Z}$ este inel Euclidian (inelul $\mathbb{Z}$ împreună cu funcția modul verifică E1 și E2), adică are loc:

Teorema (împărţirii cu rest în $\mathbb{Z}$). Pentru orice numere întregi a, b, cu $b \neq 0$, există numerele întregi c, r, astfel încât $a = bc + r$, cu $r = 0$ sau $|r| < |b|$. Dacă se impune şi $r > 0$, c şi r sunt unic determinate cu aceste proprietăţi.

Demonstrație. Existența. Se consideră mulțimea numerelor $|a - bm|$, unde $m \in \mathbb{Z}$ și fie $|a - bu|$ cel mai mic element al acesteia. Să punem $h = a - bu$. Atunci $|h|<|b|$, căci dacă, prin absurd, $|h| \geq |b|$, atunci fie $|h - b| < |h|$, fie $|h + b| < |h|$, prin urmare fie $|a - (u+1)b| < |h|$, fie $|a - (u-1)b|<|h|$, contradicție, căci $a - (u+1)b$ și $a - (u-1)b$ sunt numere întregi. Astfel, luând $r = h$ când $h \geq 0$ și $r = h+|b|$ când $h < 0$, cererea din enunț este satisfăcută.

Unicitatea. Fie $a = bc_1 + r_1$ și $a = bc_2 + r_2$ cu (1) $0 \leq r_i < |b|, i \in \{1,2\}$ și, prin absurd, $c_1 \neq c_2$. Atunci $b(c_1 - c_2) = r_2 - r_1$, deci $|b| \leq |r_2 - r_1|$, în contradicție cu (1).

Fie două numere $a, b \in \mathbb{Z}$, nenule. Un număr $d \in \mathbb{Z}$ se numește cel mai mare divizor al lui a și b, notat $d = (a,b)$, dacă:

a) $a|d$ *și* $b|d$,

b) oricare $d' \in \mathbb{Z}$ astfel încât. $a|d'$ și $b|d'$, atunci $d|d'$.

Dacă pentru $a, b \in \mathbb{Z}$ avem $(a, b) = 1$, vom spune despre a și b că sunt <u>prime între ele</u>.

Teoremă. Orice pereche de numere $a, b \in \mathbb{Z}$ diferite de 0 are un singur cel mai mare divizor comun.

Demonstrație. Existența. Conform teoremei împărțirii cu rest avem $a = bc_1 + r_1$, $0 \le r_1 < |b|$ Dacă $r_1 > 0$, avem $b = r_1c_2 + r_2$, $0 \le r_2 < r_1$. Dacă $r_2 > 0$, avem $r_1 = r_2c_3 + r_3$, $0 \le r_3 < r_2$. Există un număr natural n astfel încât $r_{n-1} = r_nc_{n+1} + r_{n+1}$, unde $r_{n+1} = 0$. Atunci $r_{n-1} | r_n$, deci $r_{n-2} = r_{n-1}c_n + r_n$, $r_{n-2} | r_n$ etc, $b | r_n$ și $a | r_n$. Reciproc, dacă $a|h$ și $b|h$, atunci din relațiile precedente obținute din împărțiri succesive cu rest, obținem $r_n | h$, prin urmare $r_n = (a, b)$

Unicitatea. Fie d_1 și d_2 doi cel mai mare divizor comun pentru a și b, Atunci $d_1|d_2$ și $d_2|d_1$, deci $d_1 = d_2$.

Succesiunile anterioare de împărțiri cu rest poartă numele de <u>algoritmul lui Euclid</u>.

Corolar. Oricare $a,b \in \mathbb{Z}$ avem $(a,b)=1$ când și numai când $\exists r, s \in \mathbb{Z}$ astfel încât $ar+bs = 1$

Demonstrație. Din algoritmul lui Euclid avem că $r_1 = a - bc_1$, $r_2 = a(-c_2) + b(1 + c_1c_2)$ etc, deci $r_n = au + bv$, u,v$\in \mathbb{Z}$.

Numerele <u>prime</u> în $\mathbb{Z}$ se definesc că fiind acele numere întregi p cu proprietatea că $p \notin \{-1, 0, 1\}$, iar singurii divizori ai lui p sunt ± 1, $\pm p$. Evident, numerele prime din $\mathbb{Z}$ sunt numerele de forma $\pm p$, cu $p \ge 2$ număr prim în $\mathbb{N}$.

Aplicație. Orice număr întrg prim $p > 2$ este de forma $p = 4k+1$ sau $p = 4k+3$ unde $k > 0$.

Soluție. Într-adevar, din teoremă împărțirii cu rest, p are una din următoarele forme: $p = 4k$, $p = 4k+1$, $p = 4k+2$, $p = 4k+3$. Cum p este prim și $p > 2$, atunci nu poate avea decat forma $4k+1$ sau $4k+3$.

Teorema împărţirii cu rest are un rol esențial în aritmetica lui $\mathbb{Z}$ și, drept consecinţă, încă două teoreme fundamentale în $\mathbb{Z}$:

Teoremă. Orice ideal al lui $\mathbb{Z}$ este principal (adică de forma $n\mathbb{Z}$, cu $n \in \mathbb{Z}$).

Teorema fundamentală a aritmeticii (Teorema de descompunere unică în factori primi). Orice număr întreg nenul şi neinversabil se poate scrie în mod unic ca un produs finit de numere întregi prime (unicitatea fiind înţeleasă pînă la ordinea factorilor şi la o asociere a lor în divizibilitate).

Numim ideal al inelului $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ orice submulţime nevidă $P \subset \mathbb{Z}$ astfel încât:

i) Dacă $x, y \in P$, atunci $x - y \in P$

ii) Dacă $x \in P$ şi $b \in \mathbb{Z}$, atunci $bx \in P$.

Propoziţie. Fie $P \subset \mathbb{Z}$ un ideal. Atunci există $d \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ astfel încât $P = d\mathbb{Z}$.

Demonstraţie. Dacă $P=\{0\}$, atunci $d = 0$. Presupunem că $P \neq \{0\}$. Atunci există $x \in P$, $x \neq 0$. Dacă $x>0$, atunci $x \in \mathbb{N}$, iar dacă $x<0$, cum P este un ideal, $-x \in P$ și atunci $-x \in \mathbb{N}$. În concluzie $P \cap \mathbb{N} \neq \phi$. Putem alege $d \in P \cap \mathbb{N}$ că fiind cel mai mic element din $P \cap \mathbb{N}$ şi să demonstrăm că $P = d\mathbb{Z}$. Cum $d \in P$ și P este ideal al inelului $\mathbb{Z}$, incluziunea $d\mathbb{Z} \subset P$ este imediată. Fie acum $a \in P$. Conform teoremei împărțirii cu rest, putem scrie $a = cd + r$, cu $c, r \in \mathbb{Z}$ şi $0 \leq r < d$. (căci $d \in \mathbb{N}$). Scriind $r = a - cd$ cum $a, d \in P$ deducem că $r \in P$. Datorită minimalităţii lui d deducem că $r = 0$ și astfel $a = cd \in d\mathbb{Z}$, de unde și incluziunea inversă $P \subset d\mathbb{Z}$, care ne asigură egalitatea $P = d\mathbb{Z}$.

Fie $a \in \mathbb{Z}$, nenul și $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$, un număr prim. În mod evident, există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $a | p^k$ și $a \nmid p^{k+1}$ (altfel zis k este cel mai mare număr natural cu proprietatea $a | p^k$).

Convenim să notăm $k = o_p(a)$ şi să-l numim ordinul sau exponentul lui p în a. Dacă $a = 0$ vom lua $o_p(0) = -\infty$, iar $o_p(a) = 0 \Leftrightarrow p \nmid a$.

Propoziţie. Orice număr natural nenul se scrie că un produs de numere naturale prime.

Demonstraţie. Fie A mulțimea numerelor naturale nenule ce nu se scriu că produs de numere naturale prime. Dacă prin absurd propoziţia nu ar fi adevărată, atunci $A \neq \phi$ și mulţimea A va conţine un element minimal x. În particular, $x > 1$ şi cum x nu este prim putem scrie $x = m \cdot n$ cu $1 < m, n < x$. Cum $m, n < x$, iar $x = \inf A$, deducem că $m, n \notin A$, deci m și n se scriu că produse de numere prime. Atunci și $x = m \cdot n$ se scrie ca produs de numere prime-absurd . Deci $A = \phi$ şi cu aceasta propoziţia este demonstrată.

Corolar. Pentru orice $n \in \mathbb{Z}^*$ există numerele întregi prime $p_1, \ldots, p_m$ astfel încât $n = p_1^{k_1} \ldots p_m^{k_m}$ cu $k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{N}$. Acest lucru se mai scrie $n = (-1)^{\varepsilon(n)} \prod_{\substack{p \geq 2 \\ p \text{ prim}}} p^{e(p)}, \varepsilon(n) \in \{0,1\}$, (după cum n este pozitiv sau negativ), iar exponenţii $e(p)$ sunt numere naturale numai pentru un număr finit de p-uri

Lemă. Dacă $a, b, c \in \mathbb{Z}$, astfel încât $(a, b)=1$ şi $a|bc$, atunci $a|c$.

Demonstraţie. Într-adevăr, cum $(a, b) = 1$ există $r, s \in \mathbb{Z}$, astfel încât $ra+sb = 1$, de unde $c = rac+sbc$. Cum $a|bc$ şi $a|arc$, deducem că $a|(rac+sbc)$, adică $a|c$.

Corolar. Dacă $p, a, b \in \mathbb{Z}$ astfel încât p este prim şi $p|ab$, atunci $p|a$ sau $p|b$.

Demonstraţie. Într-adevăr, singurii divizori ai lui p în $\mathbb{Z}$ sunt $\pm 1, \pm p$. Atunci $(p, b) = 1$ sau $p|b$. Dacă $p|b$ totul este în regulă, iar dacă $(p, b)=1$, atunci se aplică lema anterioară.

Corolar. Presupunem că $p, a, b \in \mathbb{Z}$ iar p este prim. Atunci $o_p(ab) = o_p(a)+ o_p(b)$.

Demonstraţie. Dacă $\alpha = o_p(a)$, $\beta = o_p(b)$, atunci $a=p^{\alpha} c$ şi $b=p^{\beta} d$, cu $p \nmid c$ şi $p \nmid d$. Atunci $ab=p^{\alpha+\beta} cd$ şi cum $p \nmid cd$, deducem că $o_p(ab)= \alpha + \beta = o_p(a)+o_p(b)$.

Teorema fundamentală a aritmeticii. Pentru orice număr întreg nenul n, există o descompunere a lui în factori primi $n = p_1^{k_1} \dots p_m^{k_m}$ cu exponenţii $k_1, \dots, k_m$ în mod unic determinaţi de n.

Demonstraţie. Scrierea lui n sub forma din enunţ rezultă dintr-un Corolar anterior. Probăm unicitatea acestei scrieri. Aplicând pentru un număr prim q, o_q în ambii membrii ai egalităţii $n = (-1)^{\varepsilon(n)} \prod_{\substack{p \geq 2 \\ p \text{ prim}}} p^{e(p)}, \varepsilon(n) \in \{0,1\}$, obţinem: $o_q(n) = \varepsilon(n) o_q(-1) + \sum_p e(p) o_q(p)$, dar $o_q(-1)$ $=0$ şi $o_q(p) = \begin{cases} 0, p \neq q \\ 1, p = q \end{cases}$, de unde deducem că $e(q)=o_q(n)$, deci, astfel, teorema este demonstrată.

Corolar. Pentru orice $n \in \mathbb{Z}$ există şi sunt unice numerele prime distincte $p_1, \dots, p_m$ şi numerele naturale $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{N}$ astfel încât $n = p_1^{k_1} \dots p_m^{k_m}$ (spunem că această scriere a lui n este descompunerea lui n în factori primi)

Corolar. Fie $a, b, c, n \in \mathbb{N}$ astfel încât $(a,b)=1$ şi $ab=c^n$. Atunci există $x, y \in \mathbb{N}$ astfel încât. $a=x^n$ şi $b=y^n$.

Teoremă (Legendre). Dacă $n \in \mathbb{N}$ iar p este un număr prim, atunci exponentul lui p în $n!$ este dat de $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \left[\frac{n}{p^k} \right]$ (unde $[x]$ reprezinta cel mai mare număr intrg mai mic sau egal cu x)

Demonstraţie. În mod evident exponentul e_p al lui p în $n!$ este dat de $e_p = 1 \cdot k_1 + 2 \cdot k_2 + \dots$, unde k_1 este numărul numerelor luate dintre 1, 2, …, n care se divid cu p dar nu cu p^2, k_2 este numărul numerelor luate dintre 1, 2, …, n care se divid cu p^2 dar nu cu p^3, etc.

Să calculăm acum un k_i . Numerele ce se divid prin p^i dintre 1, 2, …,n sunt

$1\cdot p^i$, $2\cdot p^i$, …, $t_i\cdot p^i$, cu $t_i\cdot p^i \le n < (t_i+1)\cdot p^i$, deoarece dacă j este luat dintre 1,2,..,n şi $p^i | j$ avem $j = t\cdot p^i$ şi cum $1 \le j \le n$ avem $1 \le t\cdot p^i \le n$. Dar $t_i \le \frac{n}{p^i} < t_i + 1$, deci $t_i = \left[\frac{n}{p^i}\right]$ Numerele luate dintre 1, 2, …,n care se divid cu p^{i+1} se află toate printre numerele luate dintre 1, 2, …,n care se divid cu p^i.

Dacă din numerele luate dintre 1, 2, …,n care se divid cu p^i (ce sunt în număr de t_i) extragem toate numerele luate dintre 1, 2, …,n care se divid cu p^{i+1} (ce sunt în număr de $t_{i+1} = \left[\frac{n}{p^{i+1}}\right]$) obținem numai numerele luate dintre 1, 2,…,n care se divid cu p^i dar nu se divid cu o putere mai mare a lui p (deoarece nu se divid cu p^{i+1}).

Conform celor de mai sus numărul acestora este egal cu $k_i = t_i - t_{i+1}$.

Avem deci $e_p = 1\cdot(t_1 - t_2) + 2\cdot(t_2 - t_3) + ... = t_1 + t_2 + ... = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + ...$ (această sumă este finită deoarece va există un $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $p^k \le n < p^{k+1}$ şi atunci $\left[\frac{n}{p^s}\right] = 0$, pentru orice $s \ge k+1$).

2.6. Congruenţe pe $\mathbb{Z}$

Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$ un număr fixat. Vom spune că $a, b \in \mathbb{Z}$ sunt <u>congruente modulo n</u> dacă $a - b$ este divizibilă prin n ; în acest caz scriem $a \equiv b(n)$.

Propoziție. Relația de congruenţă modulo n este o echivalenţă pe $\mathbb{Z}$ compatibilă cu operaţiile de adunare şi înmulţire de pe $\mathbb{Z}$ (adică este o congruenţă pe inelul $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$).

Demonstrație. Faptul că relația de congruentă modulo n este o relație de echivalenţă pe $\mathbb{Z}$ se probează imediat. Pentru a proba compatibilitatea acesteia cu operaţiile de adunare şi înmulţire de pe $\mathbb{Z}$, fie $a, b, a', b' \in \mathbb{Z}$ astfel încât $a \equiv b(n)$ şi $a' \equiv b'(n)$, adică $a-b=kn$ şi $a'- b'=k'n$, cu $k, k' \in \mathbb{Z}$. Atunci $a+a'-(b+b') = (k+k')n$, adică $a+a' \equiv b+b'(n)$ și scriind $aa'- bb' = a(a'-b')+b'(a-b) = ak'n+b'kn = (ak'+b'k)n$, deducem că şi $aa' \equiv bb'(n)$.

Pentru $x \in \mathbb{Z}$ vom nota prin $\hat{x}$ clasă de echivalenţă a lui x modulo n. Deoarece resturile împărţirii unui număr oarecare din $\mathbb{Z}$ prin n sunt 0, 1,…,n-1, se deduce imediat că dacă notăm mulțimea claselor de echivalenţă modulo n prin $\mathbb{Z}_n$, atunci $\mathbb{Z}_n = \{\hat{0}, \hat{1}, ..., \widehat{n-1}\}$, iar pentru $k \in \{0,1,...,n-1\}$, avem $\hat{k} = \{k + nt \mid t \in \mathbb{Z}\}$.

Pe mulțimea $\mathbb{Z}_n$ se definesc operaţiile de adunare şi înmulţire, astfel: $\hat{x}+\hat{y}=x+y, \hat{x}\hat{y}=xy$

Propoziție. ($\mathbb{Z}_n$, +, ·) este inel comutativ în care unităţile sale sunt

U($\mathbb{Z}_n$, +, ·)= $\{\hat{x}\in\mathbb{Z}_n \mid (x,n)=1\}$.

Demonstraţie. Elementul neutru la adunare este $\hat{0}$, iar $-\hat{x}=n-x$. Elementul neutru fața de înmulțire este $\hat{1}$. Dacă $\hat{x}\in U(\mathbb{Z}_n)$, $\exists\hat{y}\in\mathbb{Z}_n$, astfel încât $\hat{x}\hat{y}=\hat{1}\Leftrightarrow xy=\hat{1}\Leftrightarrow xy-1\mid n$, de unde ($x$, y) = 1.

Exemplu. $U(\mathbb{Z}_{12})=\{\hat{1},\hat{5},\hat{7},11\}$

Observaţie. Dacă pentru un număr natural n = 1 definim φ(1) = 1, iar pentru $n\geq 2$, φ(n) = numărul numerelor naturale $m<n$ astfel încât (m, n)=1, atunci $|U(\mathbb{Z}_n)|$ = φ(n).

Funcția φ: $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ definită mai sus poartă numele de <u>indicatorul lui Euler</u>.

Corolar. ($\mathbb{Z}_n$, +, ·) este corp $\Leftrightarrow$ n este prim.

CAPITOLUL III. Construcția mulțimii numerelor raționale

În cele mai vechi documente matematice, începând cu manuscrisul lui Ahmes (Egipt, sec. XX-XVII î.e.n.), se tratează calculul cu fracții. Explicaţia acestui fapt constă în nevoia de a măsura mărimi continue (lungimi, suprafeţe etc). Deși erau cunoscute încă din antichitate, fracțiile nu au fost considerate numere, decât foarte târziu, în Evul Mediu. Vechii egipteni foloseau fracțiile la împărțirea terenurilor agricole și a cantităților de cereale. Nici vechii greci nu considerau fracțiile ca numere, ci ca mărimi, fiindcă pentru ele aveau ca model împărțirea numerelor naturale exprimate fie prin lungimi de segmente, fie prin cantități. Teoria fracțiilor s-a consolidat, însă, abia pe la începutul secolului al XVI-lea.

Introducerea lui $\square$ este motivată, printre altele, de imposibilitatea efectuării unor împărţiri în $\square$. De exemplu, nu este definit rezultatul (câtul) împărţirii lui 3 la 2; altfel spus, ecuaţia $3x = 2$ nu are soluții în $\square$. Genelalizând, dacă $b, a \in \square$ şi a nu se divizibil prin b, ecuaţia $bx = a$ nu are soluții în $\square$. Apare ideea (similară cu aceea de la construcţia precedentă a lui $\square$) de a introduce o nouă mulțime de numere (numerele raționale) ca fiind „toate câturile posibile de numere întregi".

3.1. Mulțimea $\square$

Se consideră mulțimea $\square \times \square^*$, iar elementele ei (a, b) se vor desemna prin $\frac{a}{b}$. Pe mulțimea $\square \times \square^*$ se definesc adunarea: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+cb}{bd}$ și înmulțirea: $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$. Ele iau valori în $\square \times \square^*$, căci inelul $\square$ nu are divizori ai lui 0, sunt asociative, comutative și înmulțirea este distributivă față de adunare.

În mulțimea $\square \times \square^*$ se consideră o relație definită astfel: $\forall (a, b), (c, d) \in \square \times \square^*$, $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$. Aceasta este o relație de echivalenţă, căci, avem evident că $(a, b) \sim (a, b)$, dacă $(a, b) \sim (c, d)$, atunci $(c, d) \sim (a, b)$ și dacă $(a, b) \sim (c, d)$ și $(c, d) \sim (e, f)$, atunci $ad = bc$ și $cf = de$, deci $adf = bcf = bde$ și deci $af = be$, $(a, b) \sim (e, f)$.

O clasă de echivalenţă (un element al mulţimii $\square \times \square^*/\sim$) este notat(ă) cu a/b sau $\frac{a}{b}$ şi este numit(ă) fracție; a este numărătorul, iar b este numitorul fracției a/b. Fracția $\frac{a}{b}, b \neq 0$ se numește ireductibilă când $(a, b) = 1$.

Prin urmare $\frac{a}{b} \square \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$

Notăm cu $\alpha \in \square \times \square^* / \sim$ clasa de echivalență a lui $\frac{a}{b} \in \square \times \square^*$ și cu $\alpha' \in \square \times \square^* / \sim$ clasa de echivalență a lui $\frac{c}{d} \in \square \times \square^*$. Definim adunarea: $\alpha + \alpha'$ este clasa de echivalență a fracției $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ și înmulțirea: $\alpha\alpha'$ este clasa de echivalență a fracției $\frac{a}{b} \frac{c}{d}$. Ele sunt corect definite. Verificarea constă în aplicarea definiţiilor relaţiei de echivalenţă şi a operaţiilor de „ +” și „ · ”.

Mulțimea fracțiilor (mulțimea cât $\square \times \square^* / \sim$), înzestrată cu cele doua operații binare se numește mulţimea numerelor raționale și se notează cu $\square$ (de la iniţiala cuvântului quotient, care înseamnă cât, atât în engleză cât și în franceză), iar elementele sale se numesc numere raționale. Așadar un număr rațional este o clasă de echivalență. Notăm $\square^* = \square \setminus \{0\}$. Oricare ar fi numărul întreg a, clasă de echivalență a lui $\frac{a}{1}$ este formată din fracțiile $\frac{am}{m}, m \in \square^*$.

3.2. Adunarea și înmulțirea pe $\square$

Pornind de la operațiile de adunare și înmulțire din $\square$, s-au definit operațiile de adunare și înmulțire pe $\square = \square \times \square^* / \sim$ folosind reprezențanti oarecare.

Propoziție. **($\square$,+,·)** este corp comutativ.

Dmonstrație. Evident adunarea în $\square$ ia valori în $\square$, este asociativă și comutativă. Fie 0 clasă de echivalență a lui $\frac{0}{1}$, atunci $\forall \alpha \in \square$, $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$. Desemnând prin $-\alpha$ clasa de echivalență a lui $\frac{-a}{b}$, unde $\frac{a}{b}$ este un element din $\alpha \in \square$, avem $\alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = 0$. Deci $-\alpha$ este opusul lui α relativ la adunarea numerelor raționale.

Prin urmare $\square$ formează față de adunare grup comutativ.

Înmulțirea în $\square$ ia valori în $\square$, este asociativă și comutativă. Fie 1 clasa de echivalență a lui $\frac{1}{1}$, atunci $\forall \alpha \in \square$, $\alpha 1 = 1 \alpha = \alpha$. Desemnând pentru fiecare $\alpha \neq 0, \alpha \in \square$, prin $\frac{1}{\alpha}$ clasa de echivalență a lui $\frac{b}{a}$, unde $\frac{a}{b} \in \alpha$ ($b \neq 0$ deoarece $\alpha \neq 0$), avem

$\alpha \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \alpha = 1$, deci $\frac{1}{\alpha}$ este inversul lui α relativ la înmulțirea numerelor raționale.

Prin urmare mulțimea $\mathbb{Q}^*$ formează față de înmulțire un grup comutativ.

Cum înmulțirea în $\mathbb{Q}$ este și distributivă față de adunare, avem că $\mathbb{Q}$ este corp comutativ.

Elemenul $\frac{1}{\alpha}, \alpha \in \mathbb{Q}^*$ se noteaza α^{-1}.

3.3. Relația de ordine pe $\mathbb{Q}$

Fie $\alpha \in \mathbb{Q}$, α clasa de echivalență a lui $\frac{a}{b}$ cu $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}^*$. α este, prin definiție, pozitiv, când $ab > 0$ și α este negativ atunci când $ab < 0$. Orice număr rațional este fie 0, fie pozitiv, fie negativ.

Spunem că numărul rațional α este mai mic decât numărul rațional β, și notăm $\alpha < \beta$, dacă există un număr rațional pozitiv γ astfel încât $\alpha + \gamma = \beta$.

Proprietate. Relația < este o relație de ordine strictă, adică oricare $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$, avem $\alpha \not< \alpha$; dacă $\alpha < \beta$, atunci $\beta \not< \alpha$ și dacă $\alpha < \beta$, $\beta < \gamma$, atunci $\alpha < \gamma$

Pentru $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ relaţia dată de $\alpha \le \beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$ sau $\alpha = \beta$ este o relație de ordine totală (reflexivă: $\alpha \le \alpha$, antisimetrică: dacă $\alpha \le \beta$ și $\beta \le \alpha$, atunci $\alpha = \beta$ și tranzitivă: dacă $\alpha \le \beta$ şi $\beta \le \gamma$, atunci $\alpha \le \gamma$), adică pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$, dacă γ este soluția ecuației, în corpul $\mathbb{Q}$, $\alpha + x = \beta$, atunci fie γ=0, fie γ>0, fie γ<0, prin urmare fie $\alpha = \beta$, fie $\alpha > \beta$, fie $\alpha < \beta$.

Observație. Mulțimea $\mathbb{Q}$, împreună cu adunarea, înmulțirea și relația de ordine este un corp total ordonat.

Proprietăți. Pentru $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$, avem:

1. $\alpha > 0 \Leftrightarrow \alpha$ este pozitiv
2. $\alpha < 0 \Leftrightarrow \alpha$ este negativ
3. $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma < \beta + \gamma$
4. Dacă $\alpha > 0, \beta > 0 \Rightarrow \alpha\beta > 0$
5. Dacă $\alpha < \beta, \gamma > 0 \Rightarrow \alpha\gamma < \beta\gamma$
6. $\alpha < \beta, \gamma < 0 \Rightarrow \alpha\gamma > \beta\gamma$

Proprietăți. Fie $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$ astfel încât $\alpha \leq \beta$. Atunci au loc relațiile:

1. $-\beta \leq -\alpha$
2. Dacă $\delta \geq 0$, atunci $\alpha\,\delta \leq \beta\,\delta$
3. Dacă $\delta \leq 0$, atunci $\alpha\,\delta \geq \beta\,\delta$.

Scufundarea lui $\mathbb{Q}$ în $\mathbb{R}$

Fie funcția $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $f(p) = \frac{p}{1}$, $p \in \mathbb{Q}$. Oricare $p, q \in \mathbb{Q}$ funcția f are proprietățile:

$$f(p+q) = f(p) + f(q)$$
$$f(pq) = f(p)f(q)$$
$$\text{dacă } p < q \Rightarrow f(p) < f(q)$$

Prin urmare funcția *f* este injectivă și deci putem identifica $p \in \mathbb{Q}$ cu $f(p) \in \mathbb{R}$. Așadar *f* este o scufundare a lui $\mathbb{Q}$ în $\mathbb{R}$.

Mulțimea numerelor raționale mai mari sau egale cu 0 se notează $\mathbb{Q}_+ = \{\alpha \in \mathbb{Q} \mid \alpha \geq 0\}$.

Proprietate. Oricare ar fi numărul rațional *r*, există un număr natural *n* cu *n* > *r*.

Demonstrație. Presupunem că $r > 0$ și fie $r = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Q}$, $p > 0, q > 0$. Deoarece

$pq \geq p \Rightarrow p \geq r$

Proprietate. Pentru oricare $a, b \in \mathbb{R}$, există o infinitate de numere raționale cuprinse între *a* și *b*.

Demontrație. $\forall m, n \in \mathbb{N}, a < \frac{ma+nb}{m+n} < b$

Proprietate. Nu orice submulțime nevidă majorată a lui $\mathbb{Q}$ are margine superioară, adică relația de ordine pe $\mathbb{Q}$ nu este totală.

Demonstrația se va face în capitolul următor.

Propoziție. Mulțimea $\mathbb{Q}$ este numărabilă.

Lema. Ecuația $x^2=2$ nu are soluții în $\mathbb{Q}$.

Demonstrație. Presupunem că ar există un număr rațional al cărui pătrat să fie egal cu 2, adică $\exists a \in \square, b \in \square^*, (a,b) = 1$ astfel încât $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$. Din $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2 \Rightarrow a^2 = 2b^2$, adică $a^2 | 2 \Rightarrow a | 2 \Rightarrow$ $a = 2k, k \in \square$. Egalitatea devine $4k^2 = 2b^2 \Rightarrow 2k^2 = b^2$, ceea ce inseamnă că $b|2$. Deci a și b sunt divizibile cu 2 ceea ce contrazice afirmația $(a, b) = 1$.

3.4. Reprezentarea unui număr rațional sub formă de fracție zecimală (periodică)

De obicei, în practică se folosește reprezentarea (scrierea) numerelor raționale sub formă de fracții zecimale, adică orice număr rațional $\frac{a}{b}$, cu $a \geq 0$ și $b > 0$ se reprezintă cu ajutorul algoritmului de împărțire, sub forma unei fracții zecimale finite sau infinite. Putem scrie $\frac{a}{b} = a_0, a_1 a_2 \ldots$, unde a_0 se numește partea întreagă a lui $\frac{a}{b}$, iar $0, a_1 a_2 \ldots$ partea fracționară a sa. Numerele $a_1, a_2, \ldots \in \{0,1,\ldots,9\}$. O fracție zecimală infinită $a_0, a_1 a_2 \ldots$ se numește periodică dacă există numerele naturale k și p astfel încât $a_{n+p} = a_n$, $\forall n \geq k$. Se notează $a_o, a_1 a_2 \ldots a_{k-1}(a_k a_{k+1} \ldots a_{k+p-1})$. Mulțimea cifrelor scrise în paranteză se numește perioadă. Dacă $k=1$ avem fracție zecimală periodică simpla; în caz contrar avem fracție zecimală periodică mixtă. Fracțiile zecimale finite, prin adăugarea de zerouri, pot fi considerate fracții zecimale infinite periodice.

Fie fracția $\frac{a}{b}, a \geq 0$ și $b > 0$. Dacă fracția este supraunitară, împărţind pe a la b putem scrie $a = bq + r$, cu $0 < r < b$ şi atunci $\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b}$, astfel că se continuă studiul lui $\frac{a}{b}$ cu $\frac{r}{b}$ care este subunitară; convenim să scriem $\frac{a}{b} = q\frac{r}{b}$. De exemplu $\frac{21}{4} = 5\frac{1}{4}$.

Dacă numărul rațional $\frac{a}{b}, b \neq 0$ este negativ (folosind regula semnelor putem lua a negativ și b pozitiv), atunci putem scrie $a = bq + r$, cu $0 < r < b$ și atunci $\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b}$, unde q este un număr întreg (partea întregă) și $\frac{r}{b}$ este un număr rațional nenegativ mai mic decat 1 (partea fracționara). De exemplu $-\frac{31}{5} = -7 + \frac{4}{5}$ (-31=-7 · 5+4); $-\frac{3}{7} = -1 + \frac{4}{7}$ (-3=-1 · 7+4).

Teoremă. Orice număr rațional se reprezinta în mod unic sub forma de fracție zecimală infinita periodică, cu perioada diferită de 9.

Demonstrație. Fie $a \in \square$. Atunci $a = a_0 + a'$, unde a_0 este parte întregă a lui a iar $a' \in \square_+, a' < 1$. Dacă *a'* se reprezinta sub formă de fracție zecimală periodică, care nu are perioada 9, atunci și a se reprezintă sub formă de fracție zecimală periodică, care nu are perioada 9, în care partea întregă este a_0 și partea fracționara este *a'*. Așadar, este suficent să considerăm numerele raționale $\frac{a}{b}$, pentru care $0 \le \frac{a}{b} < 1$. Fie $\frac{a}{b}$ ($a \ge 0$ și $b > 0$) un astfel de număr rațional. Prin algoritmul de împărțire a lui a la b sunt posibile resturile: 0,1,…b-1, deci după cel mult b pași ai algoritmului se repeată unul dintre ele adică vom avea o fracție zecimală periodică. Să arătam că fracția zecimală periodică nu poate avea perioada 9. Dacă, prin absurd, fracția ar avea perioada egala cu 9, atunci prin algoritmul de împărțire, am ajunge la un momnt dat la un rest r, care înmulțit cu 10 și împărțit la b să se obțină un cât egal cu 9 și restul să fie r. Dec $10r = b \cdot 9 + r, r < b \Rightarrow 9r = 9b \Rightarrow r = b$, contradicție cu ipoteza $r<b$.

Numărul rațional $\frac{a}{b}, a \in \square, b \in \square^*$, se poate scrie sub formă de:

a) fracție zecimală finită (infinită periodică cu perioada egala cu 0) dacă $b=2^a5^b$ (numărul de zecimale este egal cu cel mai mare dintre numerele a şi b).

Exemplu: $a = 3, b = 40, \frac{a}{b} = \frac{3}{40} = 0,075$

b)fracție zecimală periodică simplă dacă b este prim cu 10 (adică b descompus în factori primi nu are nici pe 2 nici pe 5 ca factori).

Exemplu: $a = 8, b = 21, \frac{a}{b} = \frac{8}{21} = 0,380952380952... = 0,(380952)$

c)fracție zecimală periodică mixtă dacă $b = 2^a5^bp^mq^n\ldots$ (adică b descompus în factori primi are și alti factori în afara de factorii 2 sau/și 5).

Exemplu: $a = 5, b = 24, \frac{a}{b} = \frac{5}{24} = 0,20833... = 0,208(3)$

CAPITOLUL IV. Construcția mulțimii numerelor reale

Necesitatea introducerii numerelor întregi și a celor raționale este aproape evidentă din experienţa imediată. Nu acesta este cazul numerelor reale, care au apărut din raţiuni mai profunde. Descoperirea de către matematicienii Greciei antice că diagonala pătratului de lungime 1 nu poate fi exprimată ca un raport de numere întregi (în termeni moderni, $\sqrt{2} \notin \square$, adică ecuația $x^2=2$ nu are soluție rațională) a condus la o adevărată criză a ştiinţei și filozofiei în acea vreme. Insuficența corpului numerelor raționale poate fi uneori suplinită găsind numere raționale care să verifice „cu aproximație" relațiile considerate, adică, găsind, de exemplu, pentru ecuația $x^2=2$, numere raționale al căror pătrat sa fie apropiat de 2.

Imaginea intuitivă cea mai simplă despre $\square$, care reflectă cel mai bine structura de ordine, este cea a punctelor de pe o dreaptă, axa numerelor (alt concept abstract, dar mai accesibil gândirii), unde s-a fixat un punct O (originea, corespunzând lui 0) şi un alt punct U, diferit de primul (corespunzător lui 1 și având rolul de a fixa unitatea de măsură pe acea dreaptă). Orice număr real corespunde în mod unic unui punct de pe dreaptă. Se conturează astfel ideea intuitivă că numerele reale „pot măsura orice distanţă".

Primele dovezi privind existența numerelor reale (irației) îi sunt atribuite lui Pitagora (de fapt, lui Hippasus de Metapontum). Povestea spune că Hippasus a descoperit numerele iraţionale, atunci când încerca să reprezinte rădăcina pătrată a lui 2 ca o fracție, dar Pitagora nu a putut să accepte existenţa numerelor raționale, chiar dacă nu a putut infirma existenţa lor, prin logică, aşa că l-a condamnat pe Hippasus la moarte prin înec.

După recunoașterea, în secolului al XVI-a, a numerelor negative și fracționare, urmează, prin secolul al XVII-lea, ca matematicienii să folosească notaţia actuală pentru fracția zecimală. Abia în secolul al XIX-lea matematicienii au întreprins studiul ştiinţific al numerelor raționale. Elaborarea noțiunii matematice de număr real a constituit un proces lung, sinuos, încheiat în jurul anului 1872 prin lucrările matematicienilor K. Weierstrass,
E. Heine, G. Cantor și R. Dedekind. Metoda Weierstrass (construcția zecimală) a fost complet stabilită de S. Pincherle (1880), iar a lui Dedekind (construcția prin tăieturi) a primit o importanţă suplimentară prin munca ulterioară a autorului (1888). Metoda lui Weierstrass, Cantor și Heine se bazează pe teoria privind seriile infinite, în timp ce metoda lui Dedekind se fondează pe ideea de tăiere/separare a numerelor raționale în doua grupuri cu anumite propietăți. Construcţia folosind şirurile Cauchy prezintă avantajele eleganţei şi rapidităţii, folosindu-se şi la alte construcţii importante: completatul unui corp normat oarecare,

completatul unui spaţiu metric, completatul unui spaţiu vectorial normat. Toate cele trei metode vor fi prezentate în cele ce urmează.

Lemă. Ecuația $x^2=2$ nu are soluții în $\mathbb{Q}$.

Demonstrație. Presupunem că ar există un număr rațional al carui patrat sa fie egal cu 2, adică $\exists a\in\mathbb{Q}, b\in\mathbb{Q}^*, (a,b)=1$ astfel încât $\left(\frac{a}{b}\right)^2=2$. Din $\left(\frac{a}{b}\right)^2=2\Rightarrow a^2=2b^2$, adică $a^2|2\Rightarrow a|2\Rightarrow a=2k, k\in\mathbb{Q}$. Egalitatea devine $4k^2=2b^2\Rightarrow 2k^2=b^2$, ceea ce inseamnă că $b|2$. Deci a și b sunt divizibile cu 2 ceea ce contrazice afirmația $(a, b) = 1$.

4.1. Construcția lui $\mathbb{Q}$ prin tăieturi

Se numește <u>tăietură</u> în $\mathbb{Q}$ un cuplu (I, II) de mulțimi disjuncte de numere raționale, astfel ca:

a) $\forall a, a'\in\mathbb{Q}$ cu $a'<a$, dacă $a\in I$ atunci $a'\in I$

b) $\forall A, A'\in\mathbb{Q}$ cu $A<A'$, dacă $A\in II$ atunci $A'\in II$

c) $\forall r\in\mathbb{Q}_+^*, \exists a_1\in I$ si $A_1\in II$ astfel încât $A_1-a_1<r$

Mulțimea I (respectiv II) se numește prima clasă (rspectiv a doua clasă) a tăieturii. Conform c) I și II nu sunt vide.

Dacă s este o tăietură în $\mathbb{Q}$, un număr rațional c este, prin definiție, clasat prin raport la s, dacă fie c aparține primei clase a tăieturii, fie c aparține celei de a doua clasă a tăieturii.

Exemplu. Multimile $I=\{a\in\mathbb{Q}\mid a<2\}, II=\{A\in\mathbb{Q}\mid A>2\}$ formează o tăietură în $\mathbb{Q}$, deoarece $r\in\mathbb{Q}_+^*, \exists a_1, A_1\in\mathbb{Q}$ astfel că $2-\frac{r}{2}<a_1<2<A_1<2+\frac{r}{2}$, prin urmare $A_1-a_1<r, a_1\in I$ si $A_1\in II$.

Lemă. Fie I și II doua mulțimi nevide, disjuncte a căror reuniune este $\mathbb{Q}$. Dacă sunt indeplinite condițiile a) și b) din definiția tăieturii, atunci I și II formeaza o tăietură în $\mathbb{Q}$.

Demonstrație. Trebuie să demonstrăm condiția c). Fie $r\in\mathbb{Q}_+^*$ și $a\in I, A\in II$. Dacă $d=A-a, \frac{1}{2}(A+a)\in I$ sau $\frac{1}{2}(A+a)\in II$. Dacă $\frac{1}{2}(A+a)\in I$, luând $a_1=\frac{1}{2}(A+a)\in I, A_1=A$ avem $a_1\in I, A_1\in II, A_1-a_1=\frac{1}{2}(A-a)$. Când $\frac{1}{2}(A+a)\in II$, luând $A_1=\frac{1}{2}(A+a), a_1=a$, avem $a_1\in I, A_1\in II, A_1-a_1=\frac{1}{2}(A-a)$. Repetând, se obțin a_2 și A_2 astfel că

$a_2 \in I, A_2 \in II, A_2 - a_2 = \frac{1}{2}(A_1 - a_1) = \frac{d}{2^2}$, prin urmare a *n*-a oara se obțin a_n și A_n astfel că $a_n \in I, A_n \in II, A_n - a_n = \frac{d}{2^n}$. Dar $\exists p \in \mathbb{N}, \frac{d}{p} < r \Rightarrow \frac{d}{2^p} < r$, de unde concluzia.

Proprietate. Dacă *s* este o tăietură în $\mathbb{Q}$ avem că pentru $\forall a \in I, A \in II$, $a<A$

Demonstrație. Dacă $a \geq A \Rightarrow a \in II$, contradicție deoarece *I* și *II* sunt disjuncte.

Proprietate. Există cel mult un număr rațional neclasat prin raport la *s*

Demonstrație . Presupunem prin absurd că dacă l_1 și l_2, $l_1<l_2$, nu sunt clasate, atunci conform cu a) și b) din definiția tăieturii, $\forall a \in I, A \in II \Rightarrow a < l_1 < l_2 < A \Rightarrow A - a > l_2 - l_1$, în contradicție cu c).

Proprietate. Dacă *l* nu este clasat prin raport la *s*, atunci $I = \{a \in \mathbb{Q} \mid a < l\}, II = \{A \in \mathbb{Q} \mid l < A\}$

Demonstrație. Presupunem că toate numerele raționale sunt clasate prin raport la *s*. Atunci fie *I* are un cel mai mare element și *II* nu are un cel mai mic element, fie *I* nu are un cel mai mare element și *II* nu are un cel mai mic element. Dacă prin absurd, a_0 (respective A_0) este cel mai mare (respectiv mic) element al lui *I* (respectiv *II*), atunci pentru orice $a \in I$ și $A \in II$, $A - a \geq A_0 - a_0 > 0$.

O tăietură *s* în $\mathbb{Q}$, prin raport la care toate numerele raționale sunt clasate și astfel că *I* nu are un cel mai mare element iar *II*, un cel mai mic element, se numește <u>tăietură de speța a doua</u>. O tăietură care nu este de speța a doua se numește <u>tăietură de speța intâi</u>.

Exemplu. *I* este mulțimea numerelor raționale negative, 0 și numerele raționale pozitive *a* cu $a^2<3$, iar *II* este mulțimea numerelor raționale pozitive *A*, cu $A^2>3$, *a'* din $\mathbb{Q}$ cu $a' < a$, $a \in I$. Dacă $a' \leq 0$, atunci $a' \in I$, iar dacă $a' > 0$, atunci, cum $a'^2 < a^2 < 3$, de asemenea $a' \in I$, condiția b) din definiția tăieturii este și ea verificată și cum $I \cup II = \mathbb{Q}$, căci nu există un număr rațional *r* cu $r^2=3$, *I* și *II* formeaza o tăietură în $\mathbb{Q}$. Aceasta este o tăietură de speța a doua. Într-adevar, fie, prin absurd, a_0 cel mai mare element al lui *I*, atunci cum $a_0^2 < 3$, există un număr natural *n* astfel încât $\left(a_0 + \frac{1}{n}\right)^2 < 3$, prin urmare $a_0 + \frac{1}{n} > a_0$.

Fie *r* un număr rațional. Cuplurile $\{a \in \mathbb{Q} \mid a < r\}$ si $\{a \in \mathbb{Q} \mid A > r\}$, $\{a \in \mathbb{Q} \mid a \leq r\}$ si $\{a \in \mathbb{Q} \mid A > r\}, \{a \in \mathbb{Q} \mid a < r\}$ si $\{a \in \mathbb{Q} \mid A \geq r\}$ sunt taituri în $\mathbb{Q}$, determinate de *r*, de prima speță. Oricare ar fi numărul rațional *c*, dacă *c* se află în prima clasă (respectiv a doua clasă) a

uneia din tăieturile determinate de *r*, atunci $c \le r$ (respectiv $c \ge r$). Reciproc, orice număr rațional *c*, $c<r$ (respectiv $c>r$) se află în prima clasă (respectiv a doua clasă) a fiecăreia din tăieturile determinate de *r*. Astfel, oricare ar fi numerele raționale *l* și *l'*, dacă $l \neq l'$, atunci tăieturile determinate de *l* și *l'* sunt, două câte două, diferite, căci pentru $l<l'$ de pilda, fie $c \in \mathbb{Q}$ cu $l<c<l'$, *c* se află în a doua clasă (respectiv în prima clasă) a fiecareia din tăieturile determinate de *l* (respectiv *l'*), iar prima clasă și a doua clasă a unei tăieturi sunt disjuncte.

Propoziție. Orice tăietură *s* în $\mathbb{Q}$ de speța întâi este determinată de un număr rațional.

Demonstrație. Dacă $\exists l \in \mathbb{Q}$ neclasat prin raport la *s*, avem $I = \{a \in \mathbb{Q} \mid a < l\}$, $II = \{a \in \mathbb{Q} \mid A > l\}$, iar dacă toate numerele raționale sunt clasate, dacă a_0 (respectiv A_0) este cel mai mare (respectiv mic) element al lui I (resp *II*) avem $I = \{a \in \mathbb{Q} \mid a < A_0\}$, $II = \{A \in \mathbb{Q} \mid A \ge A_0\}$.

În mulțimea τ a tăieturilor în $\mathbb{Q}$ se definește o relație de echivalență $\equiv$ astfel: $s \equiv t$ când *s* și *t* sunt de speța a doua și $s = t$, sau când *s* și *t* sunt de speța întâi și sunt determinate de același număr rațional. Fiecare clasă de echivalență este formată sau dintr-un element (o tăietură de speța a doua) sau din trei elemente (cele trei tăieturi definite de un număr rațional). Mulțimea cât $\tau / \equiv$ se desemnează prin $\mathbb{R}$, iar elementele sale se numesc numere reale. Pentru fiecare *r* din $\mathbb{R}$, se notează cu (*r*) clasa de echivalență formată din cele trei tăieturi determinate de *r*.

Adunarea pe $\mathbb{R}$

În mulțimea τ, a tăieturilor în $\mathbb{Q}$ definim o adunare: $s+t$ este tăietură în $\mathbb{Q}$ formată de $I = \{a+b \mid a \in I_s, b \in I_t\}, II = \{A+B \mid A \in II_s, B \in II_t\}$.

Fie $a' \in \mathbb{Q}$, $a'<a+b$, $a \in I_s, b \in I_t$, $a'=a''+b$, cu $a'' \in \mathbb{Q}$. Deci $a''<a$ și $a'' \in I_s$. Fie $l > 0$, $l \in \mathbb{Q}$, $\exists a_1, A_1 \in I_s, b_1, B_1 \in I_t$, astfel încât $A_1 - a_1 < \frac{l}{2}, B_1 - b_1 < \frac{l}{2} \Rightarrow (A_1 + B_1) - (a_1 + b_1) < l$ adică $s+t$ este o tăietură în $\mathbb{Q}$. Adunarea astfel definită ia valori în τ și este asociativă și comutativă. Pentru fiecare $s \in \tau$, $-s$ este tăietura din $\mathbb{Q}$ formată de $\{-a \mid a \in I\}, \{-A \mid A \in II\}$

Dacă *s* este determinată de *l*, atunci *–s* este determinată de *–l* și *s*+(-*s*) este tăietură $\{c \in \square \mid c < 0\}, \{C \in \square \mid C > 0\}$.

Propoziție. Dacă *s* și *s'* sunt două tăieturi determinate de *l* și respectiv *l'*, atunci tăietura *s*+*s'* este determinată de *l*+*l'*.

Demonstrație. Tăietura *s*+*s'* este de speța întâi (dacă, prin absurd, am presupune că este de speța a doua, atunci pentru $l + l' \in I_{s+s'} \Rightarrow \forall a \in I_s, a' \in I_{s'}, a + a' \le l + l'$, deci *l*+*l'* este cel mai mare element din $I_{s+s'}$, contradicție). Fie l_1 numărul rațional care determină pe *s*+*s'* și, prin absurd, $l_1 \neq l + l'$. Dacă $l_1 < l+l'$, se consideră $c \in \square$ cu $l_1 < c < l+l'$ și cum $c \in II_{s+s'}, c \ge l + l'$, contradicție. Reciproc, orice tăietură determinată de *l*+*l'* este suma a două tăieturi, una determinată de *l* și cealaltă de *l'*.

Propoziție. Dacă *s, s', s"* sunt cele trei tăieturi în $\square$ determinate de numărul rațional *l* și *t* este o tăietură de speța a doua, atunci tăietură *s*+*t* este de speța a doua și

s+*t* = *s'*+*t* = *s"*+*t*.

Demonstrație. Dacă, prin absurd, tăietura *s*+*t* este deterimnată de numărul rațional l_1, atunci $\forall a \in I_s, A \in II_s, \forall b \in I_t, B \in II_t \Rightarrow a + b \le l_1 \le A + B.$ Dar l_1-*l* se află sau în I_t sau II_t. Dacă $l_1 - l \in I_t \Rightarrow \exists b_1 \in I_t, l_1 - l < b_1$ și $\exists a_1 \in I_s, l - a_1 < (l + b_1) - l_1 \Rightarrow l_1 < a_1 + b_1$. Contradicție.

Fie *s* formata din $\{a \in \square \mid a \le l\}, \{A \in \square \mid A > l\}$, *s'* formata din $\{a \in \square \mid a < l\}, \{A \in \square \mid A \ge l\}$. Avem $I_{s'+t} \subset I_{s+t}$. Fie $b, b_1 \in I_t, b < b_1$. Se considera solutia a_1 a ecuatiei *l*+*b*=*x*+b_1. Cum $a_1 < l$, $a_1 \in I_s$, prin urmare $I_{s+t} \subset I_{s'+t}, I_{s+t} = I_{s'+t}$.

În mulțimea $\tau / \equiv$, adică $\square$, definim adunarea: $\alpha + \beta$ este clasa de echivalență a lui *s*+*t*, $s \in \alpha, t \in \beta$. Definiția este corectă. Oricare ar fi *l* și *l'* din $\square$, (*l*) + (*l'*) = (*l*+*l'*).

Teoremă. ($\square$,+) grup comutativ.

Demonstrație. Adunarea ia valori în $\square$, este asociativă și comutativă.

Element neutru. Pentru orice $\alpha \in \square$ avem $\alpha + (0) = \alpha$, deoarece dacă $\alpha = (l) \Rightarrow (l) + (0) = (l + 0) = (l)$. În caz contrar, fie *s* tăietura de speța a doua din α și *t* tăietura formată din $\{b \in \square \mid b < 0\}, \{B \in \square \mid B > 0\}$. Atunci, oricare

$\forall a \in I_s, b \in I_t, a+b<a \Rightarrow a+b \in I_s, I_{s+t} \subset I_s$. Fie $a \in I_s, a' \in I_s, a'>a$ și b ai *a=a'=b*. Cum b<0, $b \in I_t \Rightarrow I_s \subset I_{s+t}$, deci $I_s = I_{s+t}$.

Pentru fiecare α din $\mathbb{R}$ fie $-\alpha$ clasa de echivalență a lui *–s*, *s* din α. Atunci $\alpha+(-\alpha)$ = $(-\alpha)+\alpha$ = (0), caci *s* + (- *s*) este tăietura $\{c \in \mathbb{Q} \mid c<0\}, \{C \in \mathbb{Q} \mid C<0\}$

Pe $\mathbb{R}$ se poate definii operația de scădere astfel: $x-y \overset{def}{=} x+(-y)$

Relația de ordine pe $\mathbb{R}$

O tăietură în $\mathbb{Q}$ se numește <u>tăietură pozitivă</u> (respectiv <u>tăietură negativă</u>) când în prima clasă (respectiv în a doua clasă) a acesteia se află un număr pozitiv (negativ).

Orice tăietură din $\mathbb{R}$ este fie pozitivă, fie negativă, fie determinată de 0. O tăietură *t* în $\mathbb{Q}$, determinată de un număr rațional *l*, este pozitivă (respectiv negativa), când *l* > 0 (respectiv *l* < 0). Dacă tăieturile *s*, *t* din $\mathbb{R}$ sunt pozitive (respectiv negative), atunci tăietura *s*+*t* este pozitiva (respectiv negative).

Un element $\alpha \in \mathbb{R}$ este pozitiv (respectiv negativ), când în α se află o tăietură pozitivă (respectiv negativă). Se consideră în $\mathbb{R}$ o relație binară < definită astfel: $\alpha<\beta$ când $\exists \gamma \in \mathbb{R}, \gamma$ pozitiv astfel încât $\alpha+\gamma=\beta$. Aceasta este o relație de ordine strictă pe $\mathbb{R}$.

Proprietate. Relația de ordine < pe $\mathbb{R}$ este totală.

Demonstrație. Pentru oricare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avem fie $\alpha=\beta$, fie $\alpha<\beta$, fie $\alpha>\beta$, deoarece $\forall \gamma \in \mathbb{R}$ avem sau γ = 0 sau γ > 0 sau γ < 0.

Considerăm aplicația $l \to (l)$ de la grupul aditiv al lui $\mathbb{Q}$ în grupul $\mathbb{R}$. Această aplicație este morfism crescător ($\forall l, l' \in \mathbb{Q} \Rightarrow (l+l')=(l)+(l')$ și dacă *l* < *l'*, atunci *l'*- *l* > 0, deci $(l)-(l')=(l-l')>0$)

Fie $\alpha \in \mathbb{R}, s \in \alpha, a' \in I$. Dacă *a'* este cel mai mare element din I_s, atunci (*a'*)= α (în caz contrar (*a'*) < α și dacă γ este soluția în $\mathbb{Q}$ a ecuației $(a')+x=\alpha$ și $\gamma \le 0$, atunci $\forall a \le a'$ și *c* din prima clasă a unei tăieturi din γ, $a+c \le a'+c \le a'$ deoarece $c \le 0$, contradicție deoarece prima clasă a unei tăieturi din α nu are în *a'* pe cel mai mare elemnt al ei). Asemănator se arată că *A'* fiind cel mai mic element din II_s, atunci (*A'*)= α, fie nu, și în acest caz (*A'*) > α. Reciproc. Fie a_1 (respectiv A_1) un număr rațional. Dacă (a_1)= α (respectiv (A_1)= α), a_1 (respectiv A_1) se află în prima clasă (respectiv a doua clasă) a unei tăieturi din α, iar dacă (a_1

)< α (respectiv (A_1) > α), a_1 (respectiv A_1), se se află în prima clasă (respectiv a doua clasă) a unei tăieturi din α, deoarece $a_1+\gamma=\alpha,\gamma>0,c>0$ fiind un număr din prima clasă a unei tăieturi din $\gamma, a_1+c,$ deci a_1 se află în prima clasă a fiecăreia din tăieturile din α.

Propoziție. Oricare ar fi $\alpha,\beta\in\square,\alpha<\beta$, există un număr rațional *l* astfel încât $\alpha<(l)<\beta$.

Demonstrație. Fie $\gamma>0,\alpha+\gamma=\beta$ și *s* din α, astfel încât II_s nu are un cel mai mic element, iar $u\in\gamma$. Considerăm un număr *c* >0 din I_u. Atunci $\exists a\in I_s, A\in II_s$, astfel încât

A-a<c, deci *A<a+c*. Atunci $\alpha<(A)<(a+c)\le\beta\Rightarrow\alpha<(l)\le\beta$.

Proprietate. Fie $\alpha,\beta\in\square$, astfel încât $\forall a$ (respectiv *A*) din prima clasă (respectiv a doua clasă) a unei tăieturi din α, să avem (*a*) $\le\beta$ (respectiv (*A*) $\ge\beta$), atunci $\alpha\le\beta$ (respectiv $\alpha\ge\beta$).

Demonstrație. Presupunem că $\beta<\alpha$, $\exists l\in\square$ astfel încât $\beta<(l)<\alpha$, deci *l* se află în prima clasă a fiecareia din tăieturile din α, în contradicție cu (a) $\le\beta$. Dacă *s* și *t* sunt două tăieturi din α și respectiv β și avem $I_s\subset I_t, II_s\subset II_t\Rightarrow\alpha=\beta$. Pentru $\alpha<\beta, \exists l'\in\square$ astfel încât $\alpha<(l')<\beta$, deci *l'* se află în I_t și II_s, deci în II_t, contradicție cu I_t și II_t disjuncte.

Înmulțirea pe $\square$

În mulțimea τ_+ a tăieturilor pozitive se definește înmulțirea: *st* este tăietura cu prima clasă *I* determinată de numerele raționale negative, 0 și produsele *ab* cu *a* >0 din I_s și *b*>0 din I_t și cu a doua clasă *II* formată din produsele *AB* cu *A* din II_s și *B* din II_t.

Într-adevăr aceasta este o tăietură: fie $a'\in\square, a'<c, c\in I$, dacă $a'\le 0, a'\in I$, iar dacă *a'*>0, cum *c=ab*, *a*>0 din I_s și *b*>0 din I_t, punem $a'=a_1b\Rightarrow a_1>0, a_1<a\Rightarrow a_1\in I, a'\in I$. Fie *r* > 0 din $\square$, *B'* fiind din II_t, $\exists a_1\in I_s, A_1\in II_s, a_1>0, b_1\in I_t, B_1\in II_t, b_1>0, B_1\le B'$, astfel că

$$A_1-a_1<\frac{r}{2B'}, B_1-b_1<\frac{r}{2B'}\Rightarrow A_1B_1-a_1b_1=(A_1-a_1)B_1+(B_1-b_1)a_1\le\frac{r}{2B'}B'+\frac{r}{2B'}B'=r$$

Înmulțirea ia valori în τ_+, este asociativă și comutativă. Pentru fiecare *s* din τ_+, notăm cu s^{-1} tăietura din τ_+ cu prima clasă *I* formată din numerele negative, 0 și fracțiile $\frac{1}{A}$, *A* din II_s,

și a doua clasă *II* formată din fracțiile $\frac{1}{a}$, $a > 0$ din I_s. ss^{-1} este tăietura formată din $\{c \in \mathbb{Q} \mid c < 1\}, \{C \in \mathbb{Q} \mid C > 1\}$, deci este determinată de 1.

Proprietate. Oricare ar fi *s,t,u* din τ_+, avem *s(t + u) = st + su*.

Demonstrație. Fie $a(b+c) \in I_{s(t+u)}, a > 0, a \in I_s, b+c > 0, b \in I_t, c \in I_u$. Dacă $b > 0$, $c > 0$, atunci $ab \in I_{st}$, $ac \in I_{su}$ și $a(b+c) \in I_{st+su}$. Dacă $b \le 0$, atunci $c > 0$, deci $ac \in I_{su}$ și cum $ab \le 0$, avem $ab \in I_{st}$, deci $a(b+c) \in I_{st+su}$. Prin urmare $I_{s(t+u)} \subset I_{st+su}$. Reciproc. Fie $k+l > 0, k+l \in I_{st+su}, k \in I_{st}, l \in I_{su}$. Când $k > 0$, $l > 0$, $k = ab$, $a > 0, a \in I_s, b > 0, b \in I_t$ și $l = a'c, a' > 0, a' \in I_s, c > 0, c \in I_u$ iar dacă $a' \le a$, punând $a'c = ac_1$, avem $c_1 \le c$, deci $c_1 \in I_u, k+l = a(b+c_1) \in I_{s(t+u)}$. Când $l \le 0$, atunci $k > 0$, $k = al$ și luând $l = ac'', a > 0, a \in I_s, c'' \le 0$ deci $c'' \in I_u$ și $k+l = a(b+c'') \in I_{s(t+u)}$ deoarece $b+c'' > 0$. Prin urmare $I_{st+su} \subset I_{s(t+u)}$. Deci avem $I_{st+su} = I_{s(t+u)}$.

Proprietate. Dacă *s* și *s'* sunt doua tăieturi determinate de *l* și respectiv *l'*, atunci tăietura *ss'* este determinată de *ll'*.

Proprietate. Dacă *s, s', s''* sunt cele trei tăieturi în $\mathbb{Q}$ determinate de numărul rațional strict pozitv *l* și *t* este o tăietură de spețа a doua, atunci tăietură *st* este de spețа a doua și *st = s't = s''t.*

În $\mathbb{Q}$ considerăm înmulțirea: $\alpha\beta$, când $\alpha > 0, \beta > 0$ este clasa de echivalență a tăieturii *st*, cu $s \in \alpha, t \in \beta$.

Când $\alpha > 0, \beta < 0 \Rightarrow \alpha\beta = -(\alpha)(-\beta)$, iar când $\alpha < 0, \beta > 0 \Rightarrow \alpha\beta = -(-\alpha)\beta$; $\alpha < 0, \beta < 0 \Rightarrow \alpha\beta = (-\alpha)(-\beta)$.

Când $\alpha = 0$ sau $\beta = 0$, avem $\alpha\beta = 0$.

Teoremă. ($\mathbb{Q}$, +, ·) corp comutativ total ordonat.

Demonstrație. Înmulțirea în $\mathbb{Q}$ ia valori în $\mathbb{Q}$ și este asociativă și comutativă.

Element neutru. $\alpha(1) = \alpha$ deoarece când $\alpha > 0$, fie $s \in \alpha, t \in (1), a > 0, a \in s, b > 0, b \in t \Rightarrow ab \le a$, deci $I_{st} \subset I_s, II_{st} \subset II_s$, adică $\alpha(1) = \alpha$. Dacă $\alpha < 0 \Rightarrow (-\alpha)(1) = -\alpha$ și se aplică regula semnelor.

Element simetrizabil. $\forall \alpha \in \mathbb{Q}^*, \exists \beta \in \mathbb{Q}$ astfel încât $\alpha\beta = (1)$ deoarece când $\alpha > 0$, fie $s \in \alpha$ și β clasă de echivalență a lui s^{-1}, atunci $\alpha\beta = (1)$

Distributivitatea. $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}, \alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$. Când $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$, fie $s \in \alpha, t \in \beta, u \in \gamma$, avem $s(t+u) = st + su$. În aceeași situație avem $\alpha(\beta-\gamma) = \alpha\beta - \alpha\gamma$, deoarece dacă $\beta - \gamma > 0$, $\gamma + (\beta - \gamma) = \beta \Rightarrow \alpha\gamma + \alpha(\beta-\gamma) = \alpha\beta$; iar dacă $\beta - \gamma < 0$, atunci $\beta + (\gamma - \beta) = \gamma \Rightarrow \alpha\beta + \alpha(\gamma - \beta) = \alpha\gamma$.

Dacă $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}, \alpha > 0, \beta > 0 \Rightarrow \alpha\beta > 0$.

Scufundarea lui $\mathbb{Q}$ în $\mathbb{R}$

Fie funcția $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $f(r) = r$. Oricare $r, r' \in \mathbb{Q}$ funcția f are proprietatile:

$$f(r+r') = f(r) + f(r')$$

$$f(rr') = f(r) f(r')$$

dacă $r < r' \Rightarrow f(r) < f(r')$

Prin urmare funcția f este injectivă și deci mulțimile $\mathbb{Q}$, $f(\mathbb{Q})$ se identifică, iar elementele mulțimii $\mathbb{R} / f(\mathbb{Q})$ se numesc numere iraționale. Așadar f este o scufundare a lui $\mathbb{Q}$ în $\mathbb{R}$.

Completitudinea corpului numerelor reale.

Teoremă. Orice submulțime nevidă majorată a lui $\mathbb{R}$ are margine superioară, adică relația de ordine pe $\mathbb{R}$ este completă.

Demonstrație. Fie A o submulțime nevidă majorată a lui $\mathbb{R}$, deci există $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât $x \le \alpha, \forall x \in A$. Fie $I = \{r \in \mathbb{R} \mid \exists x' \in A, r < x'\}$ și $II = \{r \in \mathbb{R} \mid x \le r, \forall x \in A\}$.

Observăm că $I \neq \phi, II \neq \phi (\alpha \in II), I \cap II = \phi, I \cup II = \mathbb{R}$ și sunt verificate primele două proprietăți din definiția tăieturii. Atunci, conform unei leme anterioare, avem că (I,II) este tăietură, notată cu s. Fie $M = s$.

Arătăm că M este marginea superioară a lui A. Presupunem că M nu e majorant pentru A, deci există $x \in A$ astfel încât $M < x$. Dar avem că există $r \in \mathbb{R}$ cu $M = s < r < x$, deci $r \in I$, dar $r \le s$, contradicție. Deci M este marginea superioară a lui A.

M este cel mai mic majorant al lui A, căci altfel ar exista M_1 majorant pentru A, cu $M_1 < M$ și alegând $r \in \mathbb{R}$ astfel încât $M_1 < r < M$, am avea $x \le M_1 < r, \forall x \in A$ adică $r \in II$, de unde contradicția $M \le r$.

4.2. Construcţia lui cu ajutorul şirurilor Cauchy

Dacă A este un domeniu de integritate (adică un inel comutativ unitar fără divizori ai lui zero), prin ordonare pe A înţelegem o submulţime nevidă $P \subseteq A$ astfel încât:

Ord 1: Pentru orice $x \in A$ avem în mod exclusiv $x \in P$ sau $x=0$ sau $-x \in P$.

Ord 2: Dacă $x, y \in P$ atunci $x+y, xy \in P$.

În acest caz vom spune că inelul A este ordonat de P iar P este mulțimea elementelor pozitive ale lui A.

Să presupunem acum că A este ordonat de P. Cum $1 \neq 0$ și $1 = 1^2 = (-1)^2$ deducem că $1 \in P$ (adică 1 este pozitiv).

Ţinând cont de Ord 2 deducem inductiv că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $\underbrace{1+1+...+1}_{de\ n\ ori}$ este pozitiv. Un element $x \in A$, $x \neq 0$, $x \notin P$ (adică $-x \in P$) se zice negativ.

Dacă $x, y \in A$ sunt negative, atunci xy este pozitiv (căci $-x, -y \in P$ iar $(-x)(-y) = xy \in P$). Analog deducem că dacă x este negativ iar y este pozitiv, atunci xy este negativ şi că pentru orice $x \neq 0$ din A, x^2 este pozitiv.

Dacă A este corp, cum pentru $x \neq 0$ pozitiv avem $xx^{-1} = 1$ deducem că și x^{-1} este pozitiv.

Fie K un corp ordonat, $K_+ = \{x \in K | x \geq 0\}$ și funcția $|\square| : K \to K_+$, definită prin:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{daca } x \geq 0 \\ -x, \text{daca } x < 0 \end{cases}$$

Valoarea acestei funcții într-un element $x \in K$ se numește modulul (valoarea absolută) a lui x.

Un șir $(x_n)_{n \in \square}$ de elemente dintr-un corp ordonat K se numește convergent, dacă există un element $x \in K$ cu propietatea: pentru orice $\varepsilon \in K, \varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \square$, astfel încât $|x_n - x| < \varepsilon, \forall n > n_\varepsilon$.

Un șir $(x_n)_{n \in \square}$ de elemente dintr-un corp ordonat K se numește şir Cauchy (sau şir fundamental) dacă : $\varepsilon \in K, \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\, n_\varepsilon \in \square$ astfel încît $|x_n - x_m| < \varepsilon, \forall n, m \geq n_\varepsilon$

Observaţie. Să presupunem că șirul $(x_n)_{n \in \square}$ este convergent la două elemente $x, y \in K$. Atunci pentru $\varepsilon \in K, \varepsilon > 0$ şi $n \in \mathbb{N}$ suficient de mare avem : $| x - y | \leq | x - xn + xn - y | \leq$

$| x - xn | + | xn - y | \leq 2\varepsilon$ iar cum ε este oarecare deducem că $| x - y | = 0$ (căci dacă $| x - y | \neq 0$, atunci $| x - y | > 0$ și am avea $| x - y | < | x - y |$, absurd !). Prin urmare, limita unui șir este unică. Elementul x se numește limita șirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și se notează $x = \lim_{n\to\infty} x_n$.

Observatie. Deoarece avem $|x_n - x_m| \leq |x_n - x| + |x - x_m|$, rezulta că orice şir convergent este șir Cauchy.

Propoziție. Orice șir Cauchy este mărginit.

Demonstrație. Fie $\varepsilon \in K, \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încît $|x_n - x_m| < \varepsilon, \forall n, m \geq n_\varepsilon$. Avem pentru orice $n \geq n_\varepsilon$, $|x_n| < \varepsilon + |x_{n_\varepsilon}|$ și deci $|x_n| < \max(\max_{i=1}^{n_\varepsilon}(x_i), \varepsilon + |x_{n_\varepsilon}|), \forall n \in \mathbb{N}$

Corpul ordonat K în care orice şir Cauchy este convergent se zice complet.

Notăm cu δ mulțimea șirurilor Cauchy de numere raționale. Pe această mulțime introducem legile de compozitie: $(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n)$
$(x_n) \cdot (y_n) = (x_n \cdot y_n)$

Elementele neutre ale acestor legi sunt: $0 = (0, ..., 0, ...)$, respectiv $1 = (1, ..., 1, ...)$.

Propoziție. Mulțimea δ inzestrată cu legile de compoziție definite mai sus este un inel comutativ.

Demonstrație. Fie $\alpha = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\beta = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, 0=(0, 0, …) şi 1=(1, 1, …).

Să demonstrăm la început că $\alpha+\beta$ și $\alpha\beta$ sunt din δ.

Pentru $\varepsilon \in \mathbb{N}^*_+$, există $n_\varepsilon', n_\varepsilon'' \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $m, n \geq n_\varepsilon'$ să avem

$| x_m - x_n | < \frac{\varepsilon}{2}$ și pentru orice $m, n \geq n_\varepsilon''$, $| y_m - y_n | < \frac{\varepsilon}{2}$. Alegând $n_\varepsilon = \max(n_\varepsilon', n_\varepsilon'')$, deducem că

pentru orice $m, n \geq n_\varepsilon$, $| x_m - x_n |, | y_m - y_n | < \frac{\varepsilon}{2}$, astfel că

$| (x_m + y_m) - (x_n + y_n) | = | (x_m - x_n) + (y_m - y_n) | \leq | x_m - x_n | + | y_m - y_n | < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, adică $\alpha + \beta \in \delta$.

Pentru cazul produsului $\alpha\beta$ vom ţine cont de faptul că orice șir Cauchy e mărginit, deci există $M_1, M_2 \in \mathbb{N}^*_+$, astfel încât. $| x_n | \leq M_1$ și $| y_n | \leq M_2$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Notând $M = \max(M_1, M_2)$ și alegând $\varepsilon \in \mathbb{N}^*_+$, $\exists\, n_\varepsilon', n_\varepsilon'' \in \mathbb{N}$ astfel încât

$| x_m - x_n | \leq \frac{\varepsilon}{2M}$, pentru $m, n \geq n_\varepsilon'$ şi $| y_m - y_n | \leq \frac{\varepsilon}{2M}$, pentru $m, n \geq n_\varepsilon''$.

Astfel, pentru $m, n \geq n_\varepsilon = \max(n_\varepsilon', n_\varepsilon'')$, avem:

$$| x_m y_m - x_n y_n | = |x_m(y_m - y_n) + y_n(x_m - x_n)| = |x_m||y_m - y_n| + |y_n||x_m - x_n| \leq M \frac{\varepsilon}{2M} + M \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon$$

adică și $\alpha\beta \in \delta$.

În mod evident, $-\alpha = (-x_n)_{n \geq 0} \in \delta$ și $0, 1 \in \delta$.

Deducem acum imediat că $(\delta, +, \cdot)$ este inel comutativ şi unitar.

Introducem pe δ o relație de echivalență $\square$ în felul următor: $(x_n) \square (y_n) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} |x_n - y_n| = 0$.

Fără a invoca explicit valoarea limitei putem scrie $(x_n) \square (y_n) \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon \in \square_+^* \Rightarrow \exists n_\varepsilon \in \square$ astfel încît $\forall n \geq n_\varepsilon$ să aibă loc $|x_n - y_n| < \varepsilon$.

Propoziție. Relația definită mai sus este o relație de echivalență pe δ.

Demonstrație. Reflexivitatea. $\lim_{n\to\infty} |x_n - x_n| = 0 \Rightarrow (x_n) \square (x_n)$

Simetria. $(x_n) \square (y_n) \Rightarrow \forall \varepsilon \in \square_+^*, \exists n_\varepsilon \in \square$ astfel încât $|x_n - y_n| < \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon$.

Dar $|y_n - x_n| = |-(x_n - y_n)| = |-1||x_n - y_n| = |x_n - y_n| < \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon \Rightarrow (y_n) \square (x_n)$

Tranzitivitatea. Fie $(x_n) \square (y_n)$ si $(y_n) \square (z_n)$.

$\forall \varepsilon \in \square_+^*, \exists n_\varepsilon', n_\varepsilon'' \in \square$ astfel încât, $|x_n - y_n| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n \geq n_\varepsilon'$ si $|y_n - z_n| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n \geq n_\varepsilon''$.

Notăm $n_\varepsilon = \max(n_\varepsilon', n_\varepsilon'')$. Atunci vom avea:

$|x_n - z_n| = |x_n - y_n + y_n - z_n| \leq |x_n - y_n| + |y_n - z_n| < \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon \Rightarrow (x_n) \square (z_n)$.

Deci $\sim$ este o relație de echivalență și cum δ este inel atunci punând $\dot{x} + \dot{y} = \overset{\square}{x + y}$ si $\dot{x}\dot{y} = \overset{\square}{xy}$ mulțimea cât $\delta/\sim$ devine un inel comutativ (datorită compatibilității relației de echivalență cu structura de inel).

Teoremă. $\delta/\sim$ este un corp comutativ.

Demonstrație. Am văzut mai sus că mulțimea cât $\delta/\sim$ este inel comutativ. Evident $0 \neq 1$.

Fie $(x_n) \in \delta / \sim, (x_n) \neq 0 \Rightarrow (x_n) \not\sim 0$, adică există $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}_+^*$ și $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_n| \geq \varepsilon_0$ Dacă luăm $y_n = \begin{cases} 1, n < n_0 \\ \dfrac{1}{x_n}, n \geq n_0 \end{cases}$, obținem $(x_n)(y_n) = (x_n)(y_n) = (x_n y_n) = 1$. Deci $\delta/\sim$ este corp comutativ.

În sfîrşit, definim un <u>număr real</u> ca o clasă de echivalenţă de şiruri din inelul δ; mai precis, mulţimea factor $\delta/\sim$ impreună cu adunarea, înmulțirea și relația de ordine mai sus definite o notăm cu $\mathbb{R}$ și o numim <u>mulțimea numerelor reale</u>. Se observă că orice număr rațional *a* poate fi identificat cu clasă în $\delta/\sim$ a șirului constant $(a, a, \ldots) \in \delta$ (adică am obţinut într-adevăr o extindere a lui $\mathbb{Q}$ iar $\mathbb{Q}$ este subcorp al lui $\mathbb{R}$). Elementele din $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ se zic <u>numere iraționale</u>.

Ordonarea pe $\mathbb{R}$

Spunem că un șir $(x_n) \in \delta$ este pozitiv dacă pentru $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_n > -\varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon$. Mulțimea șirurilor pozitive o notăm cu δ_+ și pentru $(x_n) \in \delta$, avem propietățile: $(x_n) \in \delta_+$ sau $-(x_n) \in \delta_+$; $(x_n) \in \delta_+$ si $-(x_n) \in \delta_+ \Rightarrow (x_n) = 0$;

$(x_n) \in \delta_+$ si $(y_n) - (x_n) \in \delta_+ \Rightarrow (y_n) \in \delta_+$; $(x_n), (y_n) \in \delta_+ \Rightarrow (x_n) + (y_n) \in \delta_+, (x_n)(y_n) \in \delta_+$

Dacă $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ spunem că α este mai mic sau egal decat β și scriem $\alpha \leq \beta$, dacă există $(x_n) \in \alpha$ si $(y_n) \in \beta$ astfel încât $(y_n - x_n) \in \delta_+$. Notăm $\mathbb{R}_+ = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid 0 \leq \alpha\}$.

Teoremă. $(\mathbb{R}, \leq)$ este un corp ordonat.

Demonstraţie. Reflexivitatea. Fie $\alpha \in \mathbb{R}, (x_n) \in \alpha$. Avem

$(x_n) - (x_n) = (x_n - x_n) = 0 \in \delta_+ \Rightarrow \alpha \leq \alpha$

Antisimetria. Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \leq \beta, \beta \leq \alpha, (x_n) \in \alpha, (y_n) \in \beta$. Avem

$(y_n - x_n) \in \delta_+, (x_n - y_n) \in \delta_+$, deci $-((y_n - x_n)) \in \delta_+ \Rightarrow ((y_n) - (x_n)) \sim 0$. Dar ρ este o relație de echivalență compatibila cu structura de inel, prin urmare

$(y_n) - (x_n) + (x_n) \sim 0 + (x_n) \Rightarrow \beta = (y_n) = (x_n) = \alpha$

Tranzitivitatea. Fie $\alpha,\beta,\gamma\in\square$, $\alpha\le\beta,\beta\le\gamma$. Atunci

$(y_n)-(x_n)\in\delta_+,\forall(x_n)\in\alpha,(y_n)\in\beta$ și $(z_n)-(y_n)\in\delta_+,\forall(y_n)\in\beta,(z_n)\in\gamma$

$\Rightarrow(z_n)-(x_n)=((z_n)-(y_n))+((y_n)-(x_n))\in\delta_+$. Deci $\alpha\le\gamma$.

Fie $\alpha,\beta\in\square$, $(x_n)\in\alpha,(y_n)\in\beta$. Avem $(y_n-x_n)\in\delta_+,(x_n-y_n)=-((y_n-x_n))\in\delta_+$, deci $\alpha\le\beta$ sau $\beta\le\alpha$.

Fie $\alpha,\beta,\delta\in\square$, $(x_n)\in\alpha,(y_n)\in\beta,(z_n)\in\gamma$. Dacă luam $\alpha\le\beta$, atunci $(y_n-x_n)\in\delta_+\Rightarrow((y_n)+(z_n))-((x_n)+(z_n))\in\delta_+\Rightarrow\alpha+\gamma\le\beta+\gamma$. Dacă, în plus $\gamma\ge0$, atunci $(z_n)=(z_n)-0\in\delta_+\Rightarrow(y_n)(z_n)-(x_n)(z_n)=((y_n)-(x_n))\in\delta_+\Rightarrow\alpha\gamma\le\beta\gamma$

Pentru orice $x\in\square$ notăm *s(x)* șirul staționar determinat de *x*: *s*(*x*)=(*x,x,...,x,...*).

Atunci $s(x)\in\delta$ și aplicația $h:\square\to\square,h(x)=s(x)$ este morfism injectiv de inele. $\left(x\ne y\Rightarrow s(x)\not\square s(y)\Rightarrow h(x)\ne h(y)\right)$.

Lemă. $x\le y\Leftrightarrow h(x)\le h(y)$

$x<y\Leftrightarrow h(x)<h(y)$

$\forall\alpha\in\square,\exists x,y\in\square$, astfel încât $h(x)\le\alpha\le h(y)$

Lemă. Fie $\alpha,\beta\in\square,(x_n)\in\alpha,(y_n)\in\beta$, astfel încât $h(x_n)\le\alpha\le\beta\le h(y_n),\forall n\in\square$ și $(x_n)\not\square(y_n)$ atunci $\alpha=\beta$.

Teoremă. $(\square,\le)$ este un corp complet ordonat.

Demonstrație. Fie *A* o parte nevidă minorată a lui $\square$ și A_0 mulțimea minoranților lui *A*. Cum *A* este nevidă, avem că $A_0\ne\phi$, deci $\exists\beta\in A_0\Rightarrow\beta\le\alpha,\forall\alpha\in\square$. Dar, din lema anterioară, avem că $\exists x\in\square$, astfel încât $h(x)\le\beta\Rightarrow h(x)\in A_0$. Fie $x_0=\max\left\{x\in\square\mid h(x)\in A_0\right\}$, atunci $h(x_0)\in A_0$ și $h(x_0+1)\notin A_0$. Dacă presupunem că avem $x_k\in\square$ $(k\ge0)$, astfel încât $h(x_k)\in A_0,h(x_k+\frac{1}{10^k})\notin A_0$, atunci $h\left(x_k+\frac{1}{10^k}\right)\begin{cases}\in A_0,n=0\\\notin A_0,n=10\end{cases}$.

Notăm $n_k = \max\left\{0 \le n \le 9 \mid h\left(x_k + \frac{1}{10^k}\right) \in A_0\right\}$ și $x_{k+1} = x_k + \frac{n_k}{10^{k+1}}$. Obținem, prin inducție, un șir $(x_n) \subset \mathbb{Q}$ cu propietățiile: $h(x_k) \in A_0, \forall k \in \mathbb{N}$; $h(x_k + \frac{1}{10^k}) \notin A_0, \forall k \in \mathbb{N}$ și $x_{k+1} = x_k + \frac{n_k}{10^{k+1}}$. Din ultima proprietate și definiția lui n_k, avem $x_{k+1} - x_k \le \frac{9}{10^{k+1}}$, de unde, pentru $n>k$, obținem $x_n - x_k = (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + ... + (x_{k+1} - x_k) \le$

$$\le \frac{9}{10^n} + \frac{9}{10^{n-1}} + ... + \frac{9}{10^{k+1}}\left(1 + \frac{1}{10} + ... + \frac{1}{10^{n-k+1}}\right) = \frac{9}{10^{k+1}} \frac{1 - \frac{1}{10^{n-k}}}{1 - \frac{1}{10}} \frac{9}{10^{k+1}} \frac{10}{9} = \frac{1}{10^k},$$ deci $(x_k) \in \gamma$,

Fie $(x_n) = \alpha \in \mathbb{Q}$. Arătăm că $\alpha = \inf A$ demonstrând că $h(x_k) \le \alpha \le h(x_k + \frac{1}{10^k}), \forall k \in \mathbb{N}$. Din ultima proprietate a șirului $(x_n) \subset \mathbb{Q}$ avem că $x_0 \le x_1 \le ... \le x_k \le ...$, deci $x_n - s(x_k) = (x_n - x_k)_n \in \delta, \forall k \in \mathbb{N}$, adică $h(x_n) = s(x_k) \le (x_n) = \alpha, \forall k \in \mathbb{N}$. Dar $x_n - x_k < \frac{1}{10^k}, \forall n > k$, prin urmare $x_k + \frac{1}{10^k} - x_n > 0, \forall n > k$, deci avem că $s\left(x_k + \frac{1}{10^k}\right) - (x_n) \in \delta_+, \forall k \in \mathbb{N}$, adică $\alpha \le h\left(x_k + \frac{1}{10^k}\right), \forall k \in \mathbb{N}$. Prin urmare $\alpha = \inf A$.

Arătăm că α este un minorant al lui *A*. Pentru aceasta presupunem că există $\gamma \in A, \gamma < \alpha$. Obținem $h(x_k) \le \gamma \le \alpha \le h\left(x_k + \frac{1}{10^k}\right), \forall k \in \mathbb{N}$.

Dar $\lim_{k\to\infty}\left(x_k + \frac{1}{10^k} - x_k\right) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{10^k} = 0$, ceea ce ne conduce la $\gamma = \alpha$. Contradicție cu $\gamma < \alpha$. Deci $\alpha \in A_0$.

Arătăm că α este cel mai mare minorant al lui *A*. Presupunem că $\exists \beta \in A_0, \alpha < \beta$. Din ultima proprietate a șirului $(x_n) \subset \mathbb{Q}$ avem că pentru $\forall k \in \mathbb{N}, \exists \alpha \in A, \alpha_k < h\left(x_k + \frac{1}{10^k}\right)$. Dar β fiind un minorant și $\alpha_k \in A$, rezultă $\beta \le \alpha_k$. Dar $h(x_k) \le \alpha \le \beta \le h\left(x_k + \frac{1}{10^k}\right), \forall k \in \mathbb{N}$.

Din cele de mai sus avem $\alpha = \beta$. Contradicție. Prin urmare α este cel mai mare minorant al lui *A*. În concluzie $\alpha = \inf A$.

4.3.Construcţia zecimală a lui $\mathbb{R}$

Construcţia zecimală a lui $\mathbb{R}$ are la bază ideea cum că un număr real se poate identifica cu o fracție zecimală infinită (periodică - număr rațional sau neperiodică - număr irațional).

Am văzut că un număr rațional se poate prezenta sub una din formele: fracție ordinară $\frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ sau fracție zecimală finită sau infinită periodică. Există însa numere care nu sunt raționale ca de exemplu $\sqrt{2}$ (despre care s-a demonstrat că nu se poate scrie sub forma de fracție ordinară) sau $21{,}17177177717\ldots = 21 + \frac{1}{10} + \frac{7}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{7}{10^4} + \ldots$ care este o fracție zecimală infinită. Intuitiv, $a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ este suma $a_0 + \frac{a_1}{10^1} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \ldots.$

Se numește <u>șir</u> de elemente dintr-o multime R orice funcție $f : \mathbb{N} \to R$; pentru orice $n \in \mathbb{N}$ este definit un element $a_n = f(n)$ din R.

Fie R_+ mulțimea tuturor șirurilor infinite de cifre zecimale $\alpha = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, indexate după mulțimea $\mathbb{N}$, astfel încât să existe $k \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că $a_n = 0$ pentru orice $n < k$ și să nu existe $l \in \mathbb{N}$ astfel că $a_n = 9$ pentru orice $n > l$. Elementele lui R_+ se numesc fracți zecimale reduse pozitive. Două elemente $\alpha = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}, \beta = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ din R_+ se consideră egale dacă și numai dacă $a_n = b_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Respectăm convenția de a plasa o virgulă între termenii de indice 0 și 1 ai orcărei fracții zecimale, renunțând totodată la zerourile de dinaintea primei cifre nenule a părții întregi.

Exemplu. Sirul $\alpha = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ din R_+, unde $a_{-2} = 4, a_{-1} = 0, a_0 = 2, a_1 = 1, a_2 = 7, a_3 = 5, a_n = 0,$ pentru $n \geq 4$ se scrie $\alpha = 402{,}175$. Șirul $\beta = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ din R_+ definit prin $b_n = 0, n \leq 1, b_n = 4, n \geq 2$ se scrie $0{,}0444\ldots$.

Se notează cu 0 șirul $\alpha \in R_+$ cu toți termenii nuli.

Fiecarui element $\alpha \in R_+$ i se poate asocia elementul $-\alpha$ și se notează $R_- = \{-\alpha \mid \alpha \in R_+\}$. Prin definiție, pentru $\alpha, \beta \in R_+$, avem $-\alpha = -\beta$ dacă și numai dacă $\alpha = \beta$. Se poate atunci considera mulțimea $\mathbb{R} = R_+ \cup R_-, R_+ \cap R_- = \{0\}$ pe care o vom inzestra cu operațiile algebrice și de ordine și o vom numi mulțimea numerelor reale.

Vom nota mulțimea numerelor reale cu $\mathbb{R}$ și, deci, ea este formată din fracțiile zecimale infinite periodice (adică numerele raționale) și fracțiile zecimale infinite care se numesc numere iraționale. Prin urmare, vom numi număr real orice fracție zecimală infinită care nu are perioada 9. Obișnuim să notăm un număr real sub forma $a_0, a_1a_2...a_n...$, unde $a_0 \in \mathbb{Z}, a_i \in \{0,1,..,9\}, \forall i \in \mathbb{N}$.

Observație. Sunt eliminate fracțiile zecimale infinite în care toate cifrefe sunt egale cu 9 de la un rang în colo deoarece $0,9999\ldots$, scris și ca 0,(9) („cu perioada 9") este de fapt 1=1,000…; cum nu dorim ca un acelaşi număr real să aibă două reprezentări zecimale distincte, trebuie făcută următoarea „identificare": orice şir de forma $a = a_0, a_1a_2...a_n...$, cu proprietatea că $\exists k \geq 0$ astfel încît $a_i = 9$, $\forall i > k$ și $a_k < 9$, este identificat cu șirul $a_0, a_1a_2...(a_k+1)000...$ (dacă $k \geq 1$), respectiv cu $(a_0+1), 000...$ (dacă $k = 0$).

Ordonarea numerelor reale

Fie $a = a_0, a_1a_2...$ și $b = b_0, b_1b_2...$ două numere reale, unde fracțiile $a_0, a_1a_2...$ și $b_0, b_1b_2...$ nu au perioada 9. Numerele *a* și *b* sunt <u>egale</u> dacă $a_0 = b_0$ și $a_i = b_i, \forall i \in \mathbb{N}$. Scriem $a = b$.

Spunem că numărul real $a = a_0, a_1a_2...$ este <u>mai mic</u> decât numărul real $b = b_0, b_1b_2...$ și scriem a < b în oricare din cazurile:

a) există un număr natural $k \geq 0$, astfel încât $a_k < b_k, a_i = b_i, \forall i < k$,

b) dacă $a,b < 0$ și $-b < -a$

c) dacă *a* este negativ și *b* este pozitiv

d) dacă *a* este negativ și $b=0$

Exemple: 1,4142…<3,4142…; -3,4142…<-1,4142…; 7,(2)<7,29; -7,29<-7,(2)

Spunem că numărul real $a = a_0, a_1a_2...$ este <u>mai mic sau egal</u> decât numărul real $b = b_0, b_1b_2...$ și scriem $a \leq b$ în oricare din cazurile: $a < b$ sau $a=b$.

Relația $\leq$ este o relație de ordine pe mulțimea numerelor reale și este: reflexivă ($a \leq a$), antisimetrică (dacă $a \leq b$ și $b \leq a$ atunci $a=b$) și tranzitivă (dacă $a \leq b$ și $b \leq c$ atunci $a \leq c$) și, în plus, avem $a \leq b$ sau $b \leq a, \forall a,b \in \mathbb{R}$ (adică relația de ordine pe $\mathbb{R}$ este totală).

Modulul unui număr real

Pentru $\forall a,b\in\mathbb{R}$, notăm max(*a*,*b*) cel mai mare dintre numerele *a* și *b* și cu min(*a*,*b*) cel mai mic dintre numerele *a* și *b*.

Definim funcţia valoare absolută (sau modul sau norma) astfel

$|x|:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $|x|=\max(x,-x)=\begin{cases}x, \text{daca } x\geq 0\\ -x, \text{daca } x<0\end{cases}$

Avem $x\leq|x|,|-x|=|x|,\forall x\in\mathbb{R}$.

Proprietăți.

1. $|x|\geq 0,|x|=0\Leftrightarrow x=0,\forall x\in\mathbb{R}$
2. $|x+y|\leq|x|+|y|,\forall x,y\in\mathbb{R}$
3. $|xy|=|x||y|,\forall x,y\in\mathbb{R}$. Dacă $y\neq 0$, atunci $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}$
4. Pentru $\forall x\in\mathbb{R},\varepsilon>0$ avem urmatoarele relații:

$|x|<\varepsilon\Leftrightarrow-\varepsilon<x<\varepsilon,|x|\leq\varepsilon\Leftrightarrow-\varepsilon\leq x\leq\varepsilon,|x|>\varepsilon\Leftrightarrow x<-\varepsilon$ si $x>\varepsilon,|x|\geq\varepsilon\Leftrightarrow x\leq-\varepsilon$ si $x\geq\varepsilon$

5. $||x|-|y||\leq|x-y|,\forall x,y\in\mathbb{R}$
6. $\max(x,y)=\frac{1}{2}(x+y+|x-y|),\min(x,y)=\frac{1}{2}(x+y-|x-y|),\forall x,y\in\mathbb{R}$

Cu ajutorul modulului (normei) definim o distanţă (metrică), adică o aplicație $d:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$, $d(x,y)=|x-y|$, $\forall(x,y)\in\mathbb{R}$, cu proprietăţile:

D1. $\forall x,y\in\mathbb{R}$ are loc $d(x,y)=d(y,x)\geq 0$.

D2. $\forall x,y\in\mathbb{R}$ are loc $d(x,y)=0\Leftrightarrow x=0$.

D3. $\forall x,y,z\in\mathbb{R}$ are loc $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$ (inegalitatea triunghiulară).

Tot cu ajutorul modulului definim funcția sgn, signatura lui *x*, astfel: $\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}\frac{x}{|x|},x\neq 0\\ 0,a=0\end{cases}$ sau, explicitând modulul, $\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1,x>0\\ 0,x=0\\ -1,x<0\end{cases}$

Aproximări zecimale ale numerelor reale

Fie numărul real $a = a_0, a_1 a_2 \ldots$ Aproximările zecimale prin lipsă ale numărului real *a* sunt numerele care se obțin prin înlăturarea succesivă a tuturor cifelor sale care stau după virgulă, începând cu prima cifra, apoi cu cea de-a doua etc.

Exemplu. *a* = 2,4142356……Aproximările prin lipsă ale lui *a* vor fi: 2; 2,4; 2,41; 2,414; 2,4142; 2,41423; ……

Dacă la ultimul număr de după virgula al fiecarei aproximări zecimale prin lipsă a numărului *a* se adaugă 1, atunci se obtin aproximările zecimale prin adaos ale lui *a*.

Exemplu. *a* = 2,4142356……Aproximările prin adaos ale lui *a* vor fi: 3; 2,5; 2,42; 2,415; 2,4143; 2,41424; ……

Datorită relației de ordine pe mulțimea numerelor reale, putem scrie:

$$2 \le a < 3$$
$$2{,}4 \le a < 2{,}5$$
$$2{,}41 \le a < 2{,}42$$
$$2{,}414 \le a < 2{,}415$$
$$2{,}4142 \le a < 2{,}4143,$$

aceste aproximări zecimale sunt, cu o eroare mai mică decât: 1; $0{,}1=10^{-1}$; $0{,}01=10^{-2}$; $0{,}001=10^{-3}$; $0{,}0001=10^{-4}$ etc.

Pentru numărul real $a = a_0, a_1 a_2 \ldots$ aproximările zecimale cu o eroare mai mică decât 10^{-n}, sunt: prin lipsă $a_n^{'} = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n$ și prin adaos $a_n^{''} = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n + 10^{-n}$.

Teoremă. Pentru orice număr real $a \ge 0$ și pentru orice număr întreg $n \ge 0$ avem $a_n^{'} \le a < a_n^{'} + 10^{-n}$, unde $a_n^{'}$ reprezinta aproximările zecimale cu o eroare mai mică decat 10^{-n} ale lui *a*. Dacă *a*<0, avem $\left| a_n^{'} - a \right| < 10^{-n}$.

Demonstrație. Pentru orice *a* fixat, $a_n^{'}$ este aproximarea prin lipsă de ordin *n* a numărului *a*; aproximarea prin adaos de ordinul *n* a lui *a* va fi $a_n^{'} + 10^{-n}$. Dar orice număr real este cuprins între aproximarea lui prin lipsă și prin adaos și $a_n^{''} = a_n^{'} + 10^{-n}$.

Adunarea și înmulțirea numerelor reale.

Definim adunarea și înmulțirea numerelor reale pornind de la reprezentarea lor zecimală, astfel operațiile coincid cu cele definite la mulțimea numerelor raționale. Dacă numere raționale, $a_n^{''}, a_n^{'}, b_n^{''}, b_n^{'}$ sunt aproximările zecimale prin adaos și prin lipsă ale numerelor reale *a* și *b*, atunci au sens sumele $a_n^{'}+b_n^{'}$, $a_n^{''}+b_n^{''}$ și produsele $a_n^{'}b_n^{'}$, $a_n^{''}b_n^{''}$.

Se numește <u>suma</u> numerelor reale *a* și *b*, unicul număr real, notat $c = a+b$, care, pentru $\forall n \in \square, n \geq 0$ satisfice relația $a_n^{'}+b_n^{'} \leq c < a_n^{''}+b_n^{''}$ (adică este mai mare sau egal decât orice suma a două aproximări prin lipsă a lor și mai mic decât orice suma a două aproximări prin adaos a lor).

Se numește <u>produsul</u> numerelor reale *a* și *b*, unicul număr real, notat $d = ab$, care pentru $\forall n \in \square, n \geq 0$ satisfice relația $a_n^{'}b_n^{'} \leq d < a_n^{''}b_n^{''}$. (adică este mai mare sau egal decât orice produs a două aproximări prin lipsă a lor și mai mic decât orice produs a două aproximări prin adaos a lor). Dacă unul sau ambele numere sunt negative, atunci se inmulțesc valorile lor absolute și se ține seama de regula semnelor.

Fie $\varepsilon > 0$. Se numește <u>ε apoximare</u> a lui *a* orice număr real *x* astfel încât $|x - a| < \varepsilon$. Numărul real pozitiv $|x - a|$ se numește erorea absoluta. Se scrie $a \square x$.

Teoremă. Fie *a* și *b* doua numere reale și $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$. Dacă *x* este o ε_1 aproximare a lui *a* și *y* este o ε_2 aproximare a lui *b*, atunci:

a) Suma $x+y$ este o $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ aproximare a lui $a+b$

b) Produsul xy este o ε aproximare a lui ab, unde $\varepsilon = \varepsilon_1\varepsilon_2 + |x|\varepsilon_2 + |y|\varepsilon_1$

Demonstrație. Deoarece *x* este o ε_1 aproximare a lui *a*, avem $|x - a| < \varepsilon_1$ și deoarece *y* este o ε_2 aproximare a lui *b*, avem $|y - b| < \varepsilon_2$.

a) Avem $|(x+y)-(a+b)| = |(x-a)+(b-y)| \leq |x-a| + |y-b| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2$

b) Avem $xy - ab = (x-a)(y-b) + y(x-a) + x(y-b)$, deci

$|xy-ab| \leq |x-a||y-b| + |y||x-a| + |x||y-b| < \varepsilon_1\varepsilon_2 + |x|\varepsilon_2 + |y|\varepsilon_1$

Interpretarea geometrică a numerelor reale

Fie o axă având originea O și vectorul unitate $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$. Notăm cu P mulțimea punctelor axei. Definim aplicația $d : \mathbb{R} \to P$, care asociază oricărui număr real a acel unic punct $M \in P$ astfel încât $\overrightarrow{OM} = a\vec{u}$. Deci $d(a)=M$. Aplicația d este bijectivă și se numește reprezentarea geometrică a lui $\mathbb{R}$ pe d. Inversa ei, $d^{-1} : P \to \mathbb{R}$, asociază oricărui punct al axei abcisa acestui punct. Dacă numărul real a este pozitiv, atunci punctul $A(a)$ se află la dreapta lui O, astfel încât $OA=a$; dacă numărul real a' este negativ, atunci punctual $A'(a')$ se află la stanga lui O, astfel încât $OA'=|a'|$. Dacă $a=0$, avem $d(0)=O$. Numărul $|a'|$ desemneaza distanța de la origine pâna la punctul A'. Dacă avem punctele de coordonate $P(x)$ și $Q(y)$, atunci numărul $|y - x|$ se numește distanța dintre punctele P și Q.

Submulțimi ale lui $\mathbb{R}$

Fie $a,b \in \mathbb{R}, a < b$. Atunci avem urmatoarele submulțimi pentru $\mathbb{R}$:

$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ interval deschis

$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$ interval închis la stânga și deschis la dreapta

$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$ interval deschis la stânga și inchis la dreapta

$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$ interval închis

$(a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$ interval (infinit) deschis la stânga

$[a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \ge a\}$ interval (infinit) închis la stânga

$(-\infty,a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$ interval (infinit) deschis la dreapta

$(-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le a\}$ interval (infinit) închis la dreapta

4.4.Mulțimea numerelor iraţionale

Mulțimea numerelor iraţionale se poate defini ca fiind mulțimea formată din acele numere reale care nu sunt raționale, adică fracțiile zecimale infinite neperiodice sau acele numere care nu se pot exprima ca raportul a două numere întregi. Altfel spus, mulţimea numerelor iraţionale este complementara în $\mathbb{R}$ a lui $\mathbb{Q}$, notată $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Elementele acestei mulțimi se numesc numere iraţionale.

Exemple de numere iraționale

- Numărul $\sqrt{2}$ =1,4142135…, despre care am arătat că nu este rațional. Generalizând, se demonstrează că, dacă $x \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2, x \neq d^n$, pentru orice $d \in \mathbb{Q}$, atunci $\sqrt[n]{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Exemple. $\sqrt[3]{4}, \sqrt[7]{3^6} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$,

- Numărul π = 3,1415926535 …, este raportul dintre lungimea unui cerc și diametrul său; este aceeași valoare că și raportul dintre aria unui cerc și pătratul razei lui.
- Numărul e = 2,71828 1828…., a apărut din încercarea de a li se da o valoare expresiilor $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n ; \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+...+\frac{1}{n!}\right)$, care ulterior au fost egalate cu *e*. Numărul *e* are diverse aplicatii în probleme de analiză matematică, teoria numerelor, numere complexe, teoria probabilitatilor etc.
- Numărul de aur φ = 1,61803398874…., este primul număr irațional descoperit și definit în istorie; el poate fi întâlnit în cele mai surprinzătoare împrejurări: ombilicul împarte corpul omenesc în proporţia de aur, anumite dimensiuni ale piramidelor Egiptului Antic sau ale Catedralei Notre-Dame din Paris. "Spunem că un segment de dreaptă a fost împărțit în medie și extremă rație atunci când segmentul întreg se raportează la segmentul mai mare precum se raportează segmentul cel mare la cel mai mic"(Euclid). Cu alte cuvinte, dacă segmentul de lungime *a*+*b* este împărțit în segmentele de lungimi *a*, respectiv *b*, astfel încât să avem $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \varphi$, spunem că segmentul *a* + *b* a fost împărțit intr-o sectiune de aur, φ, care se află rezolvând ecuația $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$ cu soluția pozitivă $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Numărul de aur este strâns legat de șirul lui Fibonacci, în care fiecare termen este suma celor două anterioare (1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233...). Pe măsură ce înaintăm, raportul dintre doi termeni succesivi ai șirului lui Fibonacci tinde spre φ

  Inversul lui φ, adică $1/\varphi$ are exact aceleaşi zecimale: 0,61803398874...

- Numerele $\cos 41^\circ, \lg 17, \log_2 3, ...$

Lemă. Numărul $\log_2 3 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. .

Demonstrație. Analog ca la demonstrația lui $\sqrt{2}$, presupunem, prin absurd, că numărul $\log_2 3 \in \mathbb{Q}$. Atunci $\exists m,n \in \mathbb{Z},(m,n)=1$ și avem $\log_2 3 = \frac{m}{n} \Leftrightarrow 2^{\frac{m}{n}} = 3 \Leftrightarrow 2^m = 3^n$. Absurd, deoarce (2,3) = 1.

Generalizând, dacă $m,n \in \mathbb{Z},(m,n)=1$, atunci $\log_m n \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

Lemă. Dacă $x \in \mathbb{Q}$, $y \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, atunci $x+y \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, iar dacă $x \neq 0$, atunci $xy \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

Demonstrație. Am văzut că ($\mathbb{Q}$, +, ·) este corp. Notând $z = x + y$, dacă prin absurd $z \in \mathbb{Q}$, am deduce că $y = z - x \in \mathbb{Q}$, ceea ce este absurd. Analog pentru partea a doua.

Exemple. $1 \pm \sqrt{2} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

Lemă. Operaţiile de adunare şi înmulţire nu sunt operaţii interne pe $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

Demonstrație. Fie $x = 1+\sqrt{2}$ şi $y = 1-\sqrt{2}$. Cum $1 \in \mathbb{Q}$ iar $\sqrt{2} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, conform lemei precedente deducem că $x, y \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Cum $x+y = 2$ iar $xy = -1$, deducem că $x+y, xy \in \mathbb{Q}$.

Observaţie. Cu toate acestea, este posibil că pentru $x, y \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ să avem $x+y \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ sau $xy \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ (chiar simultan !).

Exemplu. $x = \sqrt{2} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $y = \sqrt{3} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $xy = \sqrt{6} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, . Demonstrăm că $x+y \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Fie pentru aceasta $z = x + y = \sqrt{2} + \sqrt{3}$. Dacă, prin absurd, $z \in \mathbb{Q}$, atunci

$z^2 = 5 + 2\sqrt{6} \Rightarrow \sqrt{6} = \frac{z^2 - 5}{2} \in \mathbb{Q}$, absurd! .

Teoremă. $e \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

Demonstrație Să presupunem prin absurd că, $e \in \mathbb{Q}$, adică $e = \frac{a}{b}$, cu $a,b \in \mathbb{Z}$. Pentru orice $k \in \mathbb{N}, k \geq b$, cum $b \mid k!$ deducem că numărul : $c = k!\left(\frac{a}{b} - 1 - \frac{1}{1!} - \ldots - \frac{1}{k!}\right) \in \mathbb{Z}$. Dar

$0 < c = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \ldots < \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2} + \ldots = \frac{1}{k+1} \frac{1}{1 - \frac{1}{k+1}} = \frac{1}{k} < 1.$ Contradicţia provine din aceea că $c \in (0, 1)$, iar mai înainte am dedus că $c \in \mathbb{Z}$. În concluzie, $e \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

CAPITOLUL V. Prezentarea abstractă a lui □

Faptul, că o ecuație, precum $x^2 = 2$, nu are soluții în □ , a dus l-a "lărgirea" acestei mulțimi prin construcții diferite astfel încât sa putem rezolva ecuația de mai sus în mulțimea lărgită. În capitolul precedent, s-au constuit pentru □ modelul Cantor, modelul Dedekind și modelul zecimal. Deoarece există mai multe modele pentru construcția mulțimii numerelor reale, s-a pus problema unicității sistemului numerelor reale. Această problemă este rezolvată de teorema de izomorfism între oricare două corpuri complet ordonate, teoremă ce va fi demonstrată în acest capitol. Astfel, putem numi corp al numerelor reale orice corp complet ordonat. Prin urmare, este suficent să construim analiza matematică pe un anume corp complet ordonat, fie el abstract sau unul dintre modelele clasice. Pe parcursul demonstrării unicității mulțimii numerelor reale, se vor evidenția și deosebirile esențiale dintre □ și □ , adică trasăturile definitorii a lui □ care explică de ce se face Analiza matematică pe mulțimea □ și nu pe □ .

Deosebirile esențiale sunt puse în evidență, pe de o parte de următoarea teoremă și de teorema de la pagina 56, precum și de Propoziția și Teorema de la pagina 62.

Teoremă. Orice submulțime nevidă majorată a lui □ are margine superioară, adică relația de ordine pe □ este completă.

Principiul lui Cantor (lema intervalelor închise incluse).

Fie $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset ... \supset I_n \supset ...$ un șir de intervale nevide, inchise și marginite și $I_n = [a_n, b_n] \subset \square, n \geq 0$. Atunci intersecția acestor intervale este nevidă.

Criteriul lui Cauchy. Un șir de numere reale este convergent dacă și numai dacă este un șir Cauchy.

Dacă *A* este un domeniu de integritate (adică un inel comutativ unitar fără divizori ai lui zero), prin ordonare pe *A* înţelegem o submulţime nevidă $P \subseteq A$, astfel încât.:

Ord 1: Pentru orice $x \in A$ avem în mod exclusiv $x \in P$ sau $x = 0$ sau $-x \in P$.

Ord 2: Dacă $x, y \in P$, atunci $x+y$, $xy \in P$.

În acest caz vom spune că inelul *A* este ordonat de *P*, iar *P* este mulțimea elementelor pozitive ale lui *A*.

Fie A un inel comutativ. O relație de ordine $\leq$ pe A se zice compatibilă cu structura de inel, dacă: $\forall x, y, z \in A, x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$, $\forall x, y, z \in A, x \leq y, z \geq 0 \Rightarrow xz \leq yz$ și $\forall x \in A \Rightarrow x \geq 0$ sau $-x \geq 0$

Un inel (corp) înzestrat cu o relație de ordine compatibilă cu structura sa de inel (corp) se numește inel (corp) ordonat.

Fie K și K' doua corpuri ordonate. O funcțe $f : K \to K'$ se numește izomorfism de corpuri dacă :

a) f este aditivă, adică $f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in K$

b) f este multiplicativă, adică $f(xy) = f(x) f(y), \forall x, y \in K$

c) f este bijectivă

d) f este strict crescătoare, adică $\forall x, y \in K, x < y \Rightarrow f(x) f(y)$

Teoremă. Fie K un corp ordonat. Atunci corpul Q al numerelor raționale este izomorf cu un subcorp al lui K, adică orice corp ordonat conține corpul numerelor raționale ca subcorp.

Corpul ordonat K se numește arhimedeean, dacă pentru orice $x, y \in K, y > 0$ există $n \in \mathbb{N}$, astfel încat $x < ny$.

Observație. Dacă acest K este un corp arhimedeean, atunci:

a) pentru $\forall x \in K, \exists n \in \mathbb{N}$, astfel încât $x < n$

b) pentru orice $\forall \varepsilon \in K, \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}$ astfel încât $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$

Un corp K se numește corp complet ordonat dacă: K este corp ordonat și orice parte nevidă majorată a lui K are margine superioară.

Teoremă. Nu orice submulțime nevidă majorată a lui $\mathbb{Q}$ are margine superioară adică relația de ordine pe mulțimea numerelor raționale nu este completă.

Demonstrație. Fie $A = \left\{ x \in \mathbb{Q} \mid x \neq 0, x \geq 0, x^2 < 2 \right\}$. Deoarece $1 \in A$, deducem că $A \neq \phi$. Evident 2 este un majorant pentru A. Nu exista $a \in \mathbb{Q}$, astfel încât a = sup A, deoarece dacă presupunem că exista un astfel de număr, observăm că $a \geq 1$. Ne putem plasa în una dintre situațiile: $a^2 > 2$ sau $a^2 < 2$.

Dacă ne situăm in prima situație, fie $b = \frac{2 - a^2}{2(a+1)^2} \in \mathbb{Q}$ și arătăm că $a + b \in A$, de unde, deoarece a este majorant al lui A, obținem $a + b \leq a$, inegalitate ce conduce la contradicția $b \leq 0$.

Arătăm că $a+b\in A$, adică $(a+b)^2<2$. Observăm că

$b(a+1)^2=\frac{2-a^2}{2}<1\Rightarrow b<\frac{1}{(a+1)^2}<1$. Atunci

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2<a^2+2ab+b<a^2+2ab+b+a^2b=a^2+b(a+1)^2=\frac{a^2+2}{2}<2$$

Fie acum a doua situație, adică $a^2<2$ și considerăm $c=\frac{a^2-2}{2(a+1)^2}\in\mathbb{Q}$. Vom arăta că a - c este majorant al lui A, deci $a\le a-c$, adică ajungem la contradicția $c\le 0$. Rămâne să arătăm că $x\le a-c,\forall x\in A$.

Cum $x^2<2,\forall x\in A$ este suficent să demonstrăm că $c<1\Leftrightarrow 0<(a+2)^2$. Atunci avem:

$$(a-c)^2=a^2-2ac+c^2>a^2-2ac-c^2>a^2-2ac-c>a^2-2ac-c-a^2c=a^2-c(a+1)^2=\frac{a^2+2}{2}<2$$

Și astfel demonstrația este încheiată.

Teoremă. Pentru un corp K ordonat următoarele afirmații sunt echivalente:

a) K este complet ordonat

b) K este arhimedeean și orice șir descrescător de intervale inchise de lungime tinzand la zero, are intersecția nenula.

c) K este arhimedeean și orice șir Cauchy din K este convergent.

Teorema de densitate a lui $\mathbb{Q}$ în K. Fie K un corp complet ordonat cu $x,y\in K,x<y$ atunci există $a\in\mathbb{Q},x<a<y$

Demonstrație. K fiind corp complet ordonat, avem: K este arhimedeean, deci, există $n\in\mathbb{N},1<n(y-x)$, adică $x<y-\frac{1}{n}$. Aplicând din nou faptul că K este arhimedeean, obținem $m\in\mathbb{Z}$ cu proprietatea $y<\frac{m}{n}$, deci, mulțimea $B=\left\{m\in\mathbb{Z}\mid y\le\frac{m}{n}\right\}$ este nevidă. Cum $B\subset\mathbb{Z}$ B este minorată deci există $m_0\in\mathbb{Z},m_0=\inf B$. m_0 fiind cel mai mare minorant din B, rezultă că m_0 -1$\notin B$, deci $\frac{m_0-1}{n}<y$. Pe de alta parte, m_0 fiind în B verifică inegalitatea $y\le\frac{m_0}{n}$. Prin urmare, avem $x<\frac{m_0-1}{n}$. Notând $a=\frac{m_0-1}{n}\in\mathbb{Q}$, obținem $x < a < y$.

Teorema de izomorfism a corpurilor complet ordonate. Între oricare două corpuri complet ordonate *K* și *L*, există un izomorfism crescător $f : K \to L$

Demonstrație. Fie $\mathbb{Q}_K$ și $\mathbb{Q}_L$ subcorpurile raționale ale lui *K* și *L*, respectiv: $h_K : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}_K, h_L : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}_L$ izomorfismele canonice între $\mathbb{Q}$ și orice subcorp al lui *K*. Avem $\mathbb{Q}_K \xrightarrow{h_K^{-1}} \mathbb{Q} \xrightarrow{h_L} \mathbb{Q}_L$ și cum h_K^{-1} este izomorfism, obținem izomorfismul $f = h_L \circ h_K^{-1} : \mathbb{Q}_K \to \mathbb{Q}_L$. Dar h_K și h_L sunt strict crescătoare, prin urmare, aplicația *f* este strict crescătoare.

Dacă $(a_n)_n \subset \mathbb{Q}_K$, avem echivalența: $(a_n)_n$ șir Cauchy în $\mathbb{Q}_K$ dacă și numai dacă $(f(a_n))_n$ șir Cauchy în $\mathbb{Q}_L$. Construim o aplicație $\tilde{f} : K \to L$ cu proprietățile:

a) $\tilde{f}(a) = f(a), \forall a \in \mathbb{Q}_K$

b) $\tilde{f}$ este morfism

c) $\tilde{f}$ este surjectivă

d) $\tilde{f}$ este strict crescătoare

Construcția lui $\tilde{f}$

Pentru orice *x* din *K* există un șir $(a_n)_n \subset \mathbb{Q}_K$ astfel încât $x = \lim_{n\to\infty} a_n$, deci, șirul $(a_n)_n$ este Cauchy în $\mathbb{Q}$, de unde rezultă că șirul $(f(a_n))_n$ este Cauchy în $\mathbb{Q}_L \subset \mathbb{Q}$, prin urmare, șirul $(f(a_n))_n$ este convergent în *L*.

Arătăm că oricare ar fi șirurile $(a_n)_n$ și $(b_n)_n$ din $\mathbb{Q}_K$ cu $\lim_{n\to\infty} a_n = x = \lim_{n\to\infty} b_n$, avem $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = x = \lim_{n\to\infty} f(b_n)$.

Dacă șirurile $(a_n)_n$ și $(b_n)_n$ indeplinesc condiția de mai sus, atunci șirul $(c_n)_n = (a_0, b_0, a_1, b_1, ..., a_n, b_n, ...)$ converge la *x* iar $(a_n)_n$ și $(b_n)_n$ sunt subșirurile sale. Analog ca mai sus se deduce că șirul $(f(c_n))_n$ este convergent. Dar $(f(a_n))_n$ și $(f(b_n))_n$ sunt subșiruri ale lui $(f(c_n))_n$, deci $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(c_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n)$. Prin urmare, funcția $\tilde{f} : K \to L$ dată prin $\tilde{f}(x) = \lim_{n\to\infty} f(a_n)$, dacă $(a_n)_n \subset \mathbb{Q}_K$ și $\lim_{n\to\infty} a_n = x$, este corect definită.

$\tilde{f}(a) = f(a), \forall a \in \mathbb{Q}_K$. Orice element $a \in \mathbb{Q}_K$ poate fi scris sub forma

$a = \lim_{n\to\infty} a_n, a_n = a, \forall n$, deci $\tilde{f}(a) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$.

Faptul că $\tilde{f}$ este morfism rezulta din definiția lui $\tilde{f}$.

Arătăm că $\tilde{f}$ este surjectivă. Dacă $y \in L$, atunci există un șir $(y_n)_n \subset \mathbb{Q}_L$, astfel încât $y = \lim_{n\to\infty} y_n$.

Dar $f: \mathbb{Q}_K \to \mathbb{Q}_L$ este izomorfism, deci există un șir $(a_n)_n$ în $\mathbb{Q}_K$, astfel încât $y_n = f(a_n), \forall n$. Șirul $(y_n)_n \subset \mathbb{Q}_L$ fiind Cauchy rezultă că șirul $(a_n)_n$ este Cauchy, deci convergent. Notând $\lim_{n\to\infty} a_n = x$ și ținând seama de definiția lui *f* și de relațiile precedente, obținem $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} y_n = y$.

Mai avem de arătat că $\tilde{f}$ este strict crescătoare. Fie $x, y \in K, x < y$. Aplicând teorema de densitate, obținem $a, b \in \mathbb{Q}_K$, astfel încât $x < a < b < y$.

Avem că există două șiruri $(x_n)_n$ și $(y_n)_n$ din $\mathbb{Q}_K$ cu propietatile :

$x < x_n < a < b < y_n < y$, $\lim_{n\to\infty} x_n = x, \lim_{n\to\infty} y_n = y$. Morfismul *f* fiind strict crescător, obținem

$f(x_n) < f(a) < f(b) < f(y_n)$

Din definiția lui *f*, deducem $\tilde{f}(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$, respective $\tilde{f}(y) = \lim_{n\to\infty} f(y_n)$

Deci $\tilde{f}(x) < f(a) < f(b) < \tilde{f}(y)$, adică $\tilde{f}$ este strict crescătoare.

Prin urmare, toate corpurile complet ordonate fiind izomorfe între ele, se pot identifica între ele. Deci, putem defini ca fiind corp al numerelor reale, orice corp complet ordonat, adică avem:

Definiție. O mulțime nevidă $\mathbb{Q}$ pe care sunt definite două operații interne, + (adunarea) și $\cdot$ (înmulțirea), precum și o relație de ordine $\leq$, se numește o mulțime a numerelor reale dacă:

a) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ este corp comutativ

b) $\leq$ este compatibilă cu structura de corp, adică

b1)pentru $\forall a, b, x, y \in \mathbb{Q}$ astfel încât $y \geq 0$ și $a \leq b$, rezultă $a + x \leq b + x$ și $ax \leq bx$

b2)pentru orice $a \in \mathbb{Q}$ avem $a \geq 0$ sau $a \leq 0$

c) pentru orice submulțime $A \subset \mathbb{R}$ care este nevidă și marginită superior, există sup*A*.

În continuare, vom evidenția lista proprietăților definitorii ale mulțimii numerelor reale.

Teoremă. $\mathbb{R}$ este corp arhimedeean, adică pentru orice $a,b\in\mathbb{R}$, $b>0$ există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât a < *nb*.

Demonstrație. Presupunem, prin reducere la absurd, că există $a,b \in \mathbb{R}, b > 0$ astfel încât $nb \le a$, $n \in \mathbb{N}$. Atunci mulțimea $A = \{nb \mid n \in \mathbb{N}\}$ este nevidă și majorată, deci există *z* = sup*A*.

Deci, pentru orice număr natural *m*, avem

$mb + b = (m+1)b \le z \Rightarrow mb \le z - b \Rightarrow z \le z - b$ adică contradicția $b \le 0$.

Observație. Teorema anterioară arată că pentru orice număr real există un număr natural mai mare dect el.

Partea întregă și partea fracționară a unui număr real

Teorema (de existență a părții întregi). Pentru orice $a\in\mathbb{R}$, există un unic $n\in\mathbb{Z}$, astfel încât $n \le a < n+1$.

Demonstrație. Din teorema precedent, avem că pentru orice $a,b \in \mathbb{R}$, $b > 0$ există $n\in\mathbb{Z}$, astfel încat a < *nb*. Pentru *b* = 1, obținem $a \in \mathbb{R}$, a $\ge$ 1, există $n\in\mathbb{N}$ astfel încât *a* < *n*. Prin urmare mulțimea $M = \{m \in \mathbb{N} \mid a < m\}$ este nevidă. Deoarece $\mathbb{N}$ este bine ordonată, putem considera *n*' primul element al acestei mulțimi. Avem $n' \ge 2$, deci $n'-1 \notin M$, deoarece, dacă $n'-1 \in \mathbb{N} \Rightarrow n' \le n'-1$, contradicție.

Deci $n'-1 \le a < n'$ și notând $n'-1 = n$, am arătat că pentru orice $a\in\mathbb{R}$, $a \ge 1$, există $n\in\mathbb{Z}$, astfel încât $n \le a < n+1$.

Lucrând cu –*a*, obținem că pentru orice $a\in \mathbb{R}$, $a \le -1$, există $n\in\mathbb{Z}$, astfel încât $n \le a < n+1$.

Dacă $a \in [-1,0)$, pentru *n*=-1, avem $-1 \le a < 0$, adică $n \le a < n+1$

Dacă $a \in [0,1)$, pentru *n*=0, avem $0 \le a < 1$, adică $n \le a < n+1$

Prin urmare, avem că $a\in \mathbb{R}$, există $n\in \mathbb{Z}$, astfel încat $n \le a < n+1$.

Arătăm că *n* este unic. Dacă există *m*, $n\in\mathbb{Z}$, $m \ne n$, astfel încât $n \le a < n+1$ și $m \le a < m+1$, atunci, luând, de exemplu, *m* < *n*, obținem contradicția $a < n+1 \le m \le a$.

Numărul *n* se numește partea întregă a lui *a*, deci, putem enunța următoarea definiție:

Se numește <u>partea întregă</u> a numărului real *a*, numărul, notat [*a*], care reprezintă cel mai mare întreg mai mic sau egal cu *a*. Deci $[x]\in\mathbb{Z}$, $\forall x\in\mathbb{R}$ și $[a]\le a<[a]+1$.

Se numește <u>partea fracționară</u> a numărului *a*, numărul, notat {*a*}, care este egal cu diferența dintre *a* și partea sa întregă, adică {*a*} = *a* - [*a*].

Din $[a]\le a<[a]+1$ avem că {*a*} = *a* - [*a*] ≥ 0 și {*a*}=*a*-[*a*] < 1, adică $0\le a<1$.

Proprietăți.

1. Pentru $m\in\mathbb{Z}, m\le x<m+1\Rightarrow[x]=m$
2. Pentru $m\in\mathbb{Z}, m\le x<m+1, m\le y<m+1\Rightarrow[x]=[y]=m$
3. $[x]=x,\{x\}=0,\forall x\in\mathbb{Z}$
4. $[x+k]=[x]+k,\{x+k\}=\{x\},\forall k\in\mathbb{Z},\forall x\in\mathbb{R}$
5. $[x+y]\ge[x]+[y],\forall x,y\in\mathbb{R}$
6. $[xy]\ge[x][y],\forall x,y\in\mathbb{R}_+$
7. $\left[\frac{x}{n}\right]=\left[\frac{[x]}{n}\right],\forall n\in\mathbb{Z}^*,\forall x\in\mathbb{R}$
8. $[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\left[x+\frac{2}{n}\right]+...+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=[nx],\forall n\in\mathbb{Z}^*,\forall x\in\mathbb{R}$

Teorema de densitate a lui $\mathbb{Q}$ și $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ în $\mathbb{R}$.

a) Între două numere reale diferite există o infinitate de numere raționale.

b) Suma dintre un număr rațional și un număr irațional este un număr irațional

c) Între două numere reale diferite există o infinitate de numere iraționale.

Demonstrația s-a făcut în capitolul precedent.

O mulțime A se numește <u>numărabilă,</u> dacă este echipotentă cu mulțimea numerelor naturale, adică $\exists f:\mathbb{N}\to A$ bijectivă. Dacă notăm $f(n)=x_n$, avem

$A=\{x_1,x_2,..,x_n,..\}, x_i\ne x_j,\forall i\ne j$

Principiul lui Cantor (lema intervalelor închise incluse). Fie $I_0\supset I_1\supset I_2\supset...\supset I_n\supset...$ un șir de intervale nevide, închise și mărginite și $I_n=[a_n,b_n]\subset\mathbb{R}, n\ge 0$. Atunci intersecția acestor intervale este nevidă.

Demonstrație. Avem inegalitatile $a_0 \le a_1 \le ... \le a_n \le ... \le b_n \le ... \le b_1 \le b_0$

Fie multimile: $A = \{a_n \mid n \ge 0\}, B = \{b_m \mid m \ge 0\} \subset \mathbb{R}$. Există $a = \sup A, b = \inf B$ și avem $a<b$ deoarece $a_n < b_m$. Fie $x \in [a,b] \Rightarrow a_n \le a \le x \le b \le b_n, \forall n \ge 0 \Rightarrow x \in \bigcap_{n \ge 0} I_n$

Propoziție. Mulțimea $\mathbb{R}$ este numărabilă.

Demonstrație. Fie $A_0 = \{0\}, A_n = \left\{\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, -\frac{2}{n}, \frac{3}{n}, -\frac{3}{n}, ...\right\}$. Avem $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} A_n$, deci, $\mathbb{R}$ este cel mult numărabilă și cum $\mathbb{R}$ este infinită, deduce că $\mathbb{R}$ este numărabilă.

Teoremă. Mulțimea numerelor reale nu este numărabilă.

Demonstrație. Dacă $\mathbb{R}$ ar fi numărabila, atunci $\mathbb{R} = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$, cu $x_n \ne x_m, \forall m \ne n$. Fie a_1, b_1 astfel încât $x_1 \notin [a_1, b_1]$. Prin împărțirea intervalului în trei părți egale, avem că cel putin unul din cele trei intervale nu va conține x_2. Așadar există a_2, b_2, astfel încât $[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2]$ și $x_2 \notin [a_2, b_2]$. Repetând procedeul, obținem un șir $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de intervale închise cu propietățile: $x_n \notin [a_n, b_n]$ și $[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq ... \supseteq [a_n, b_n] \supseteq ...$ Dar aceste intervale, conform lemei anterioare, au intersecția nevidă. Deci, $\exists x \in \mathbb{R}$, astfel încât $x \in I_n, \forall n \in \mathbb{N}$ și $x \ne x_n$, deci $x \notin \mathbb{R}$. Contradicție cu faptul că $x \in \mathbb{R}$.

Propoziție. Fie $\phi \ne A \subset \mathbb{R}$ o mulțime minorată (respectiv majorată) și $a = \inf A$ (respectiv $b = \sup A$). Atunci *a* (respectiv *b*) este limita unui șir de elemente din *A*.

Demonstrație. Cum *a* este cel mai mic element al multimii *A*, avem că $a + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$ nu este minorant pentru *A*, deci, există $a_n \in A$ astfel încât $a \le a_n < a + \frac{1}{n}$, deci, $a = \lim_{n \to \infty} a_n$. În mod analog se obține un șir convergent la *b*.

Teorema lui Knaster de punct fix. Pentru $b, c \in \mathbb{R}, b \le c$. Fie *b* și *c* numere reale, $b < c$ și $f : [b,c] \to [b,c]$ o funcție crescătoare. Atunci există $x_0 \in [b,c]$ astfel încât $f(x_0) = x_0$.

Demonstrație. Fie $E = \{x \in [b,c] \mid x \le f(x)\}$. Mulțimea *E* este nevidă deoarece $f(b) \in [b,c] \Rightarrow b \le f(b)$. *E* fiind o mulțime majorată de numere reale, există $x_0 =$ sup *E*

Avem $x_0 = \lim_{n\to\infty} b_n, b_n \in E \subset [b,c] \Rightarrow x_o \in [b,c]$, prin urmare are sens f(x_o). Fie $x \in E \Rightarrow x \le x_0$ și cum f este crescătoare avem că $f(x) \le f(x_0)$. Dar $x \in E \Rightarrow x \le f(x)$. Deci $x \le f(x_0), \forall x \in E$, adică $f(x_0)$ este majorant al multimii $E \Rightarrow x_0 \le f(x_0)$. Din f crescătoare avem $\Rightarrow f(x_0) \le f(f(x_0)) \Rightarrow f(x_0) \in E \Rightarrow f(x_0) \le x_0 = \sup E$.

Obținem $x_0 \le f(x_0), f(x_0) \le x_0 \Rightarrow f(x_0) = x_0$.

Radicali. Puteri. Logaritmi.

Teoremă. Pentru orice număr real $a > 0$ și orice număr natural n, există $x_0 > 0$, unic, cu proprietatea $x_0^n = a$.

Demonstrație. Dacă $a = 0$, atunci $x_0 = 0$. Fie $a > 0$. Din Teorema luiKnaster de punct fix aplicată funcției $f : [0, a+1] \to \square$, $f(x) = x + \frac{a - x^n}{n(a+1)^{n-1}}$, $b = 0$ și $c = a+1$, vom avea că există $x_0 \in [0, a+1]$ astfel încât $f(x_0) = x_0$, adică $x_0^n = a$. Pentru a îndeplinii condițiile teoremei anterioare trebuie demonstrat că funcția f este crescătoare și $f([0, a+1]) = [0, a+1]$. Avem

$$0 \le x \le y \le a+1 \Rightarrow x^k \le (a+1)^k, y^k \le (a+1)^k, \forall k \in \square^* \Rightarrow$$

$$x^{n-1} + x^{n-2}y + ... + xy^{n-2} + y^{n-1} \le n(a+1)^{n-1} \Rightarrow 1 - \frac{x^{n-1} + x^{n-2}y + ... + xy^{n-2} + y^{n-1} \le n(a+1)^{n-1}}{n(a+1)^{n-1}} \ge 0$$

$$f(x) - f(y) = (y-x) - \frac{y^n - x^n}{n(a+1)^{n-1}} = (y-x)\left(1 - \frac{x^{n-1} + x^{n-2}y + ... + xy^{n-2} + y^{n-1} \le n(a+1)^{n-1}}{n(a+1)^{n-1}}\right) \ge 0$$

$\Rightarrow f(x) \le f(y)$, adică f este crescătoare.

Pentru $f(0) = \frac{a}{n(a+1)^{n-1}} \ge 0, f(a+1) = a+1 + \frac{a - (a+1)^n}{n(a+1)^{n-1}} \le a+1$ și cum f este crescătoare, rezultă că $f(x) \in [0, a+1], \forall x \in [0, a+1]$.

Unicitatea. Presupunem că există două numere reale $x_0 \ne x_1, x_0 > 0, x_1 > 0$, astfel încât $x_0^n = a, x_1^n = a$. Din $x_0 \ne x_1 \Rightarrow x_1 > x_0$ sau $x_1 < x_0$.

Dacă $x_1 > x_0 \Rightarrow x_1^n > x_0^n$. Dacă $x_1 < x_0 \Rightarrow x_1^n < x_0^n$. Deci, $a < a$ contradicție.

Unicul număr $x_0 > 0$ care verifică ecuația $x_0^n = a$ se numește <u>rădacina de ordinul *n*</u> a lui *a* și se notează $\sqrt[n]{a}$.

Proprietățile radicalilor.

1. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a,\ a \geq 0, n \in \mathbb{N}$

2. $\sqrt[n]{a^k} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^k,\ a \geq 0, n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}$

3. $\sqrt[nm]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^k},\ a \geq 0, n, m \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}$

4. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a},\ a \geq 0, n, m \in \mathbb{N}$

5. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b},\ a \geq 0, b \geq 0, n \in \mathbb{N}$ și $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},\ a \geq 0, b > 0, n \in \mathbb{N}$

6. Dacă $a > 1 \Rightarrow \sqrt[n]{a} > 1$; dacă $0 < a < 1 \Rightarrow 0 < \sqrt[n]{a} < 1,\ n \in \mathbb{N}$

Demonstrație.

1. Deorece $\sqrt[n]{a}$ este soluția pozitivă a ecuației $x_0^n = a$, avem că $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ și $\sqrt[n]{a} \geq 0, \forall a \geq 0$

2. Notăm cu $u = \sqrt[n]{a^k}, v = \left(\sqrt[n]{a}\right)^k \Rightarrow u^n = \left(\sqrt[n]{a^k}\right)^n = a^k, v^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{kn} = a^k \Rightarrow u^n = v^n$

În mod analog, folosind notațiile $u = \sqrt[n]{a^k}, v = \left(\sqrt[n]{a}\right)^k$ se demonstrează și proprietățile 3-5.

6. Presupunem, prin absurd, că $a > 1, \sqrt[n]{a} \leq 1$. Ridicând la puterea *n*, obținem $a \leq 1$, contradicție.

Dacă $a < 0$ ecuația $x^{2n} = a$ nu are nici o soluție reală (radicalii de ordin par al numelor negative nu au sens).

Dacă $a < 0$ ecuația $x^{2n+1} = a$ are o singură soluție reală negative. Soluția negativă se notează, în acest caz, $\sqrt[2n+1]{a}$. De asemenea, proprietatea 2. nu mai are sens, dacă *n* este par.

Fie $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$

Definim <u>puterea cu exponent natural</u>, a^n, inductiv, astfel: $a^1 = a, a^{n+1} = a^n \cdot a$.

Definim $a^0 = 1$.

Proprietăți. Fie $a,b\in\mathbb{R},n\in\mathbb{N}$

1. $a^n=0\Leftrightarrow a=0$
2. $1^n=1;$
3. $(ab)^n=a^nb^n$
4. Dacă $a\neq 0,\left(\frac{1}{a}\right)^n=\frac{1}{a^n}$
5. $0<a<b\Rightarrow 0<a^n<b^n$
6. Dacă $n\geq 2,0<a<1\Rightarrow a^n<a$ și $x>1\Rightarrow x^n>x$
7. $a^nb^n=(ab)^n$ și $a^{nm}=\left(a^n\right)^m$

Dacă $a\in\mathbb{R}^*,n\in\mathbb{N}$, definim puterea cu exponent negativ, $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$

Fie $a>0$ și $r=\frac{m}{n},m\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{N}$, un număr rațional. Avem $r=\frac{m}{n}=m\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\cdot m$ și, din proprietățile radicalilor: $\sqrt[n]{a^k}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^k$

Definim puterea cu exponent rațional astfel: $a^r=a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^m$

Dacă $a=0$ și $r>0$, avem $0^r=0^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{0^m}=\left(\sqrt[n]{0}\right)^m=0$, iar dacă $r\leq 0$, 0^r nu mai este definită.

Proprietăți. Avem că:

1. $a^r\cdot a^q=a^{r+q}$, $a>0,r,q\in\mathbb{R}$ și $\frac{a^r}{a^q}=a^{r-q}$, $a>0,r,q\in\mathbb{R}$
2. $\left(a^r\right)^q=a^{rq},a>0,r,q\in\mathbb{R}$
3. $\left(ab\right)^q=a^r\cdot b^r$, $a,b>0,r\in\mathbb{R}$ și $\left(\frac{a}{b}\right)^r=\frac{a^r}{b^r},a,b>0,r\in\mathbb{R}$
4. $a^{-r}=\frac{1}{a^r},a>0,r\in\mathbb{R}$
5. Dacă $a>1,r>0\Rightarrow a^r>1$
6. Dacă $0<a<1,r>0\Rightarrow a^r<1$

7. Dacă $r<0 \Rightarrow \begin{cases} a^r<1, a>1 \\ a^r>1, 0<a<1 \end{cases}$

8. Dacă $r<s \Rightarrow \begin{cases} a^r<a^s, a>1 \\ a^r>a^s, a<1 \end{cases}$

9. Dacă $0<a<b \Rightarrow \begin{cases} a^r<b^r, r>0 \\ a^r>b^r, r<0 \end{cases}$

Demonstrația se face folosind proprietățile radicalilor și notând numerele raționale $r=\frac{m}{n}, q=\frac{m'}{n}, n\neq 0$

Fie $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$ și (r_n) un șir de numere raționale convergent la x. Șirul $\left(a^{r_n}\right)$ este convergent catre un număr α

Definim puterea cu exponent real astfel: $a^x=\lim_{n\to\infty} a^{r_n}$, unde $\lim_{n\to\infty} r_n = x, r_n \in \mathbb{Q}$.

Proprietăți. Fie $a, b > 0$, $x, y \in \mathbb{R}$

1. $a^x a^y = a^{x+y}$ și $\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$
2. $\left(a^x\right)^y = a^{xv}$
3. $(ab)^x = a^x b^x$ și $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$
4. $a^{-x}=\frac{1}{a^x}$
5. $x>0 \Rightarrow \begin{cases} a^x>1, a>1 \\ a^x<1, 0<a<1 \end{cases}$
6. $x<0 \Rightarrow \begin{cases} a^x<1, a>1 \\ a^x>1, 0<a<1 \end{cases}$
7. $x<y \Rightarrow \begin{cases} a^x<a^y, a>1 \\ a^x>a^y, 0<a<1 \end{cases}$
8. $0<a<b \Rightarrow \begin{cases} a^x<b^x, x>0 \\ a^x>b^x, x<0 \end{cases}$
9. $x_n \to x \Rightarrow a^{x_n} \to a^x$

10. Dacă $a > 0, a \neq 1, a^{x_n} \to a^x \Rightarrow x_n \to x$

Pornind de la ecuația $a^x = b$ (care are sens pentru $a > 0$ și deci și pentru $b > 0$; dacă $a = 0$ este necesar ca $x > 0$ și atuci $b = 0$), care are o singură soluție, pentru $a \neq 1$ (când $a = 1$ ecuația nu are soluție unică: sau $x \in \phi$, dacă $b \neq 1$, sau $x \in \square$, când $b=1$) definim noțiunea de logaritm.

Fie $a > 0$, $a \neq 1$ și $b > 0$. Numărul real, unic, x care verifică egalitatea $a^x = b$ se numește logaritmul lui b în baza a și se notează $\log_a b$

Avem că $a^{\log_a b} = b, \log_a a = 1, \log_a 1 = 0$

Proprietăți.

1. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$, $a > 0, a \neq 1, x, y > 0$
2. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$, $a > 0, a \neq 1, x, y > 0$
3. $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$, $a > 0, a \neq 1, \alpha \in \square$
4. $a^{\log_a x} = x, \log_a a^x = x$, $a > 0, a \neq 1, x > 0$
5. Dacă $a > 1, x < y \Rightarrow \log_a x < \log_a y$
6. Dacă $0 < a < 1, x < y \Rightarrow \log_a x < \log_a y$
7. Dacă $a > 1 \Rightarrow \begin{cases} \log_a x > 0, x > 1 \\ \log_a x < 0, 0 < x < 1 \end{cases}$
8. Dacă $a < 1 \Rightarrow \begin{cases} \log_a x < 0, x > 1 \\ \log_a x > 0, 0 < x < 1 \end{cases}$

Capitolul VI. Considerații metodice

Matematica este o știință abstractă a realității, o știință, în cea mai mare parte, deductivă, motiv pentru care nu orice adevăr matematic are o aplicație practică directă. Matematica se înscrie printre disciplinele fundamentale care, alături de celelalte obiecte de învățământ, aduce o contribuție însemnată la pregătirea generală a elevilor. Prin lecțiile de matematică îi facem pe elevi să înțeleagă și să descopere frumusețea cuprinsă în rândurile laconice ale formulelor, teoremelor și principiilor științifice. În procesul de cunoaștere a realității de către elevi, aceștia ajung treptat, în funcție de felul în care se realizează cunoașterea, la o imagine globală asupra realității, la o anumită atitudine de principii în ceea ce privește relațiile dintre ei și realitate, la elementele fundamentale ale concepției științifice despre lume.

Astfel, elevul ajunge să înțeleagă că legile naturii acționează în mod obiectiv, că nu se poate comanda lucrurilor, decât ascultând aceste legi, că nu există mistere de nepătruns, ci numai probleme de rezolvat. Datorită studiului matematicii, elevul se ridică de la viziunea empirică despre lume, la una organizată rațional, către știință.

Orientarea lecțiilor de matematică spre formarea capacității de abordare dialectică a realității trebuie realizată în contextul unei tehnologii didactice orientate spre activitatea nemijlocită a elevilor. Trebuie acționat ca lecția să devină activă, participativă, conducându-i pe elevi să stabilească legături între informații noi și datele experienței personale, să interpreteze, să caute soluții, în general să gândească, să ia parte activă la elaborarea cunoștințelor.

Lucrurile se limpezesc în mintea elevului atunci când profesorul evidențiază importanța lor. Urmărind o astfel de tehnologie didactică, se constată că explicațiile se înțeleg mai bine și sunt urmărite cu mult interes de către elevi, ele având la bază o cerință izvorâtă dintr-o necesitate practică, exterioară matematicii.

Studiul matematicii trebuie să se întemeieze pe conceptele de număr, ecuație, operații cu numere, funcție etc., pe care să le abordeze în gimnaziu și sa le dezvolte în liceu, astfel încât, prin caracterul lor operational, să-l poată introduce pe elev în logica științei matematice și în sistemul ei de lucru.

Noţiunea de număr este una dintre noţiunile fundamentale ale algebrei. Studiul algebrei conduce succesiv la generalizarea noțiunii de număr, înțelegerea acestui concept facându-se prin extinderea progresivă a mulțimii sferei numerelor studiate: de la numere naturale, la numere complexe. Pornind de la mulțimea numerelor naturale (inclusiv zero), se introduc întâi

fracțiile, apoi numerele întregi. În linii mari, se respectă ordinea în care au apărut aceste numere în decursul dezvoltării matematicii - dar numai în linii mari.

În programa şcolară, studiul mulțimii numerelor reale ocupă, în prezent, un loc destul de important. Noțiunea de număr real (irațional) este introdusă începând cu clasă a VII-a, dar elevul intuiește existența lor înca din clasa a V-a atunci când, în rezolvarea ecuațiilor, de exemplu ajunge la expresii de forma $x+2 = 0$, $2x = 3$ sau $x^2 = 2$ despre care afirmă că nu au soluție în mulțimea numerelor naturale, întregi respectiv raționale.

Voi exemplifica felul cum se face trecerea treptata spre notiunea de număr real.

La începutul clasei a V-a, se introduce noțiunea de număr natural. Găsim capitolul „Numere naturale" cu conținuturi ce-l introduc pe elev în studiul matematicii: de la scrierea şi citirea numerelor naturale în sistemul de numeraţie zecimal, până la Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuaţiilor şi al inecuaţiilor și probleme de organizare a datelor.

Aici întâlnim, în cadrul lecţiei: „Diferența a două numere naturale", următoarea afirmație: „Intr-o scădere în care descăzutul este mai mic decât scazătorul, rezultatul nu este un număr natural"[6], deci există și altfel de numere decât cele naturale. Tot aici, în cadrul lectiei „Pătrate perfecte", găsim:

Exercițiu. Dovediți că, oricare ar fi numărul natural p, $5p+2$ nu poate fi pătrat perfect[7].

Soluție. $u(5p+2) \in \{2,7\}$, dar u(p.p.) $\in \{0,1,4,5,6,9\}$, prin urmare $5p+2$ nu poate fi scris ca pătratul unui număr natural, adică nu există nici un număr natural care ridicat la pătrat să facă $5p+2$. Dar un număr care este de altă natură va fi existând?

În cadrul lecției „Divizor. Multiplu", găsim următoarea problemă rezolvată:

Exercițiu. Aflați $x \in \square$, astfel încât $(3x-2)$ să fie divizibil prin14.

Soluție. Dacă $x \in \square$ și $(3x-2)$ trebuie să fie divizibil prin14, atunci $(3x-2) \in D_{14} = \{1,2,7,14\}$ de unde rezultă că $3x - 2 = 1$ sau $3x - 2 = 2$ sau $3x - 2 = 7$ sau $3x - 2 = 14$, adică $3x = 3$ sau $3x = 4$ sau $3x = 9$ sau $3x = 16$. Deoarece $x \in \square$, obținem $x = 1$ sau $x = 3$. [8]

Prin urmare, avem ecuațiile $3x = 4$ și $3x = 16$ care nu au soluții în mulțimea numerelor naturale, motiv pentru care este nevoie de introducerea unei mulțimi mai mari în care aceste ecuații să aibă soluții.

[6] Mihaela Singer şi colectiv- Matematică, Manual pentru clasă a V-a, Editura Sigma, București, 1998, pag.11

[7] Mihaela Singer şi colectiv- Matematică, Manual pentru clasă a V-a, Editura Sigma, București, 1998, pag. 37

[8] Mihaela Singer şi colectiv- Matematică, Manual pentru clasă a V-a, Editura Sigma, București, 1998, pag. 69

Tot în programa de clasa a V-a, întâlnim și capitolul „Numere raţionale mai mari sau egale cu 0”, cu conținuturi ce intoduc noțiunea de fracție ordinară și fracție zecimală. Aici întâlnim, la lecția „Numere zecimale periodice”, urmatoarea afirmație: „Putem scrie orice număr zecimal periodic ca număr fracționar”[9]. Dar, dacă numărul nu este periodic, afirmația mai ramâne valabilă? În cadrul aceluiași capitol, la lecția „Mulțimi de numere” le este prezentată elevilor incluziunea $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ cu dialogul: „Toate numerele învățate de noi până acum sunt raționale. Dar există și numere care nu sunt raționale?”„Da, dar vom învăța despre ele mai tarziu!”[10]

Trecând la clasa a VI-a, după recapitularea noțiunilor din anul precedent, găsim, în capitolul „Numere întregi”, lecția „Rădăcina pătrată” care se introduce pornind de la pătrate perfecte și de la o problemă de geometrie: „Costel vrea să taie, dint-o coală mare de carton, o bucată în formă de pătrat cu aria de 2500cm^2. Precizați cum trebuie să pocedeze el. Rezolvare. <<Trebuie să găsesc mai întâi latura pătratului>>.

Dacă un număr întreg nenegativ *k* este pătratul unui număr întreg nenegativ *x*, atunci *x* se numește rădacina pătrată a numărului *k*. Scriem: $\sqrt{k} = x$. $\sqrt{k} = x$ înseamnă $k = x^2, x \geq 0$.

Exemple. $\sqrt{0} = 0, \sqrt{1} = 1, \sqrt{16} = 4, \sqrt{(-3)^2} = 3$.

Ecuația $x^2 = a^2 (a \in \mathbb{Z})$, are în mulțimea numerelor întrgi două soluții *a* și –*a* sau, încă, $\sqrt{a^2}$ și - $\sqrt{a^2}$

Exemplu. Ecuația $x^2 = 7^2$ are soluțiile 7 și -7”[11].

La această lecție, ca aplicații, găsim exercițiile:

Exercițiu. Demonstrați că $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Demonstrația acestei afirmații este prezentată într-un capitol anterior. Apare, pentru prima dată la nivel de gimnaziu, faptul că există numere care nu aparțin mulțimii $\mathbb{Q}$, cea mai mare mulțime de numere de până acum.

Exercițiu.Determinați numerele întregi *x* și *y*, știind că $\sqrt{(x+3)^2} + \sqrt{(y-2)^2} = 3$

Rezolvare. $|x+3| + |y-2| = 3$. Cum modulele celor două numere sunt nenegative, avem situațiile:

---

[9] Mihaela Singer şi colectiv- Matematică, Manual pentru clasă a V-a, Editura Sigma, București, 1998, pag. 164

[10] Mihaela Singer şi colectiv- Matematică, Manual pentru clasă a V-a, Editura Sigma, București, 1998, pag. 169

[11] George Turcitu și colectiv-Matematică, Manual pentru clasă a VI-a, Editura Radical, Drobeta Turnu Severin, 1997, pag. 55

$|x+3|=0, |y-2|=3 \Rightarrow x=-3, y\in\{-1,5\}$; $|x+3|=1, |y-2|=2 \Rightarrow x\in\{-4,-2\}, y\in\{0,4\}$

$|x+3|=2, |y-2|=1 \Rightarrow x\in\{-5,-1\}, y\in\{1,3\}$; $|x+3|=3, |y-2|=0 \Rightarrow x\in\{-6,0\}, y=2$

În clasa a VII-a, elevii de gimnaziu iau act de existenţa numerelor iraţionale în capitolul „Mulțimea numerelor reale”, cu conținuturile: Rădăcina pătrată a unui număr natural pătrat perfect, Algoritmul de extragere a rădăcinii pătrate dintr-un număr natural; aproximări, Exemple de numere iraţionale; mulțimea numerelor reale; modulul unui număr real: definiție, proprietăţi; compararea şi ordonarea numerelor reale; reprezentarea numerelor reale pe axa numerelor prin aproximări; Reguli de calcul cu radicali: scoaterea factorilor de sub radical, introducerea factorilor sub radical, Operaţii cu numere reale (adunare, scădere, înmulţire, împărţire, ridicare la putere, raţionalizarea numitorului); Media geometrică a două numere reale pozitive.

Introducerea noțiunii de număr real se face după o recapitulare a conținuturilor: Rădăcina pătrata a unui număr natural pătrat perfect și Algoritmul de extragere a rădăcinii pătrate dintr-un număr natural; aproximări. Mai întâi se prezintă rezolvarea problemei „$\sqrt{2}\notin\square$ ”, apoi câteva exemple de numere despre care se cere să li se spună natura, cu precizarea că orice număr rațional se poate scrie ca fracție zecimală cu un număr finit de zecimale sau ca fracție zecimală periodică și exemple de numere despre care trebuie să arate, prin reducere la absurd, că nu sunt raționale, după care se definesc numerele iraționale[12]: Acele numere care nu sunt raționale le numim iraționale. În exprimare zecimală, numerele iraționale au partea zecimală infinită și neperiodică.

Fiecărui punct de pe axa numerelor îi corespunde un număr pe care îl numim număr real și care este rațional sau irațional.

Notăm cu $\square$ mulțimea numerelor reale. Deci, $\square\setminus\square$ este mulțimea numereor iraționale.

Exemple de numere iraționale: $\sqrt{3}; -3\sqrt{7}; 1+\sqrt{2}; 2,36571.....$

Reguli de calcul cu radicali:

- Produsul radicalilor: $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$; oricare $a,b\in\square_+$
- Câtul radicalilor: $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$; oricare $a,b\in\square_+$, $b\neq 0$
- Scoaterea factorilor de sub radical: $\sqrt{a^2b}=|a|\sqrt{b}$, oricare $a\in\square, b\in\square_+$

[12] George Turcitu și colectiv-Matematică, Manual pentru clasă a VII-a, Editura Radical, Drobeta Turnu Severin, 1997, pag. 50

Exemple. $\sqrt{500}=\sqrt{5\cdot 100}=\sqrt{5}\cdot\sqrt{100}=10\sqrt{5}$; $\sqrt{108}=\sqrt{3\cdot 36}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{36}=6\sqrt{3}$;

$\sqrt{\frac{12}{25}}=\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{4}}{\sqrt{25}}=\frac{2\sqrt{3}}{5}$

- Introducerea factorilor sub radicali: $a\sqrt{b}=\sqrt{a^2 b}$, oricare $a,b\in\mathbb{R}_+$

Exemple. $3\sqrt{2}=\sqrt{3^2 2}=\sqrt{18}$, $-5\sqrt{3}=-\sqrt{5^2 3}=-\sqrt{75}$

Observație. Nu se introduc factori negativi sub radical.

- Raționalizarea numitorilor: Dacă numitorul unui raport de numere reale este de forma $a\sqrt{b}$, prin amplificarea raportului cu $\sqrt{b}$, numitorul devine un număr rațional și spunem că am raționalizat numitorul $\frac{c}{a\sqrt{b}}=\frac{c\sqrt{b}}{ab}, a\in\mathbb{R}^*, b\in\mathbb{R}_+^*$

Exemple. $\frac{5}{\sqrt{5}}=\frac{5\sqrt{5}}{5}=\sqrt{5}; \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=\frac{3\sqrt{2}\sqrt{6}}{\sqrt{6}\sqrt{6}}=\frac{3\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{3}}{6}=\frac{6\sqrt{3}}{6}=\sqrt{3};$

$\frac{10\sqrt{3}}{9\sqrt{2}}=\frac{10\sqrt{3}\sqrt{2}}{9\sqrt{2}\sqrt{2}}=\frac{10\sqrt{6}}{18}=\frac{5\sqrt{6}}{9};$

Observație. $\sqrt{a\pm b}\neq\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$

Cu toate că numerele iraționale nu se reduc doar la numere de forma $\sqrt{a}$, multe exerciții utilizează numere de forma amintită. Metodele cele mai frecvente de a arăta că $\sqrt{a}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, sunt:

Metoda 1. (utilizând ultima cifră). Dacă ultima cifră a numărului a este una dintre 2,3,7,8, atunci $\sqrt{a}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

Metoda 2. Utilizând metoda reducerii la absurd

Metoda 3. Arătăm că numărul a poate fi încadrat între două pătrate perfecte consecutive, astfel că a nu va fi pătrat perfect şi astfel $\sqrt{a}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

Metoda 4. Dacă p este număr prim, astfel încât p il divide pe a, iar p^2 nu îl divide pe a, atunci $\sqrt{a}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ (Orice pătrat perfect are exponenţii factorilor primi din descompunere numere pare.)

Metoda 5. Utilizând teorema împărţirii cu rest şi formulele de calcul prescurtat, arătam că numerele de o anumită formă nu pot fi pătrate perfecte.

În clasa a VIII-a, se consolidează operațiile și calculele cu numere reale. Avem capitolul „Numere reale”, cu conținuturile: Reprezentarea numerelor reale pe axa numerelor prin aproximări, Modulul unui număr real, Intervale de numere reale; Operaţii cu numere reale; raţionalizarea numitorului, Calcule cu numere reale reprezentate prin litere; formule de calcul prescurtat, Descompuneri în factori (factor comun, grupare de termeni, formule de calcul), Rapoarte de numere reale reprezentate prin litere; operaţii cu acestea.

Noutatea acestui capitol este noțiunea de interval. Ca submulțimi ale mulțimii numerelor reale, în afară de $\emptyset, \{\}, \mathbb{R}$ și mulțimea numerelor iraționale sunt introduse intervalele. Cu ajutorul lor soluțiile unor inecuații în $\mathbb{R}$ se pot scrie mai ușor. Mulțimea numerelor reale nu are un cel mai mic sau cel mai mare element. Acest fapt se evidențiază prin simbolurile $-\infty, \infty$ și astfel $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$

Intervalele simetrice față de origine se pot caracteriza cu ajutorul modulului, astfel: $(-a, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < a\}$, $[-a, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \le a\}$.

Exercițiu. Scrieți ca interval mulțimile: $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| = x\}, B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| = -x\}$ [13]

Soluție. $|x| = x, |x| \ge 0 \Rightarrow x \ge 0 \Rightarrow A = [0, \infty) = \mathbb{R}_+$

$|x| = -x, |x| \ge 0 \Rightarrow -x \ge 0 \Rightarrow x \le 0 \Rightarrow A = (-\infty, 0] = \mathbb{R}_-$

După introducerea formulelor de calcul prescurtat, putem efectua mai rapid calcule aritmetice și algebrice, ca de exemplu raționalizarea numitorilor ce conțin expresii de forma $a \pm \sqrt{b}, \sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ cu conjugatul acestora $a \mp \sqrt{b}, \sqrt{a} \mp \sqrt{b}$:

$$\frac{c}{a \pm \sqrt{b}} = \frac{c(a \mp \sqrt{b})}{a^2 - b}, \frac{c}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \frac{c(\sqrt{a} \mp \sqrt{b})}{a - b}$$

Exemple. $\frac{3}{2 - \sqrt{3}} = \frac{3(2 + \sqrt{3})}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} = \frac{3(2 + \sqrt{3})}{2^2 - 3} = 3(2 + \sqrt{3}),$

$$\frac{10}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} = \frac{10(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3})} = \frac{10(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{5 - 3} = 5(\sqrt{5} - \sqrt{3})$$

Pentru conținutul: Descompuneri în factori (factor comun, grupare de termeni, formule de calcul) propunem următoarele exerciții cu numere iraționale care admit două descompuneri în factori:

1. Să se descompună în factori: $10+2\sqrt{21}$.

[13] Corneliu Sava și colectiv- Matematică, Manual pentru clasă a VIII-a, Editura Teora, București, 2005, pag.11

Soluție. Metoda I. Factor comun 2: $10+2\sqrt{21}=2(5+\sqrt{21})$

Metoda a II-a. Se foloseşte formula $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$, după ce se aplică un artificiu de calcul: $10+2\sqrt{21}=7+3+2\sqrt{21}=(\sqrt{7}+\sqrt{3})^2$.

Prin urmare avem: $10+2\sqrt{21}=2(5+\sqrt{21})=(\sqrt{7}+\sqrt{3})^2$.

2. Să se descompună în factori : $8-2\sqrt{7}$

Soluție. Metoda I. Factor comun pe 2 şi rezultă $8-2\sqrt{7}=2(4-\sqrt{7})$

Metoda a II-a. $8-2\sqrt{7}=7+1-2\sqrt{7}=(\sqrt{7}-1)^2$

Prin urmare avem: $8-2\sqrt{7}=2(4-\sqrt{7})=(\sqrt{7}-1)^2$

3. Să se descompună în factori: $12+2\sqrt{15}+4\sqrt{5}+4\sqrt{3}$.

Soluție. Aplicând metodele de mai sus, rezultă:

$12+2\sqrt{15}+4\sqrt{5}+4\sqrt{3}=2(6+\sqrt{15}+2\sqrt{5}+2\sqrt{3})=(\sqrt{5}+\sqrt{3}+2)^2$

4. Simplificaţi fracţia: $\frac{8+2\sqrt{15}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$.

Soluție. $\frac{8+2\sqrt{15}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\sqrt{5}+\sqrt{3}$ pe când, dacă se vedea doar forma $8+2\sqrt{15}=2(4+\sqrt{15})$, părea că fracţia este ireductibilă dacă elevului nu-i vine ideea de a raţionaliza numitorul.

Aplicații ale numerelor reale în diferite concursuri și publicații[14].

1. Numerele întregi din intervalul $[-5,4]$ sunt în număr de .... (Evaluare Națională,2012, Model)

Soluție. $[-5,4]=\{-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$. Numerele intregi sunt în număr de 10.

2. Se consideră mulţimea $A=\{x\in\mathbb{R}\mid 2x\le 4\}$. Mulțimea A este egală cu intervalul … (Evaluare Națională, 2012)

Soluție. $2x\le 4\Leftrightarrow x\le 2\Leftrightarrow x\in(-\infty,2]$. Deci $A=(-\infty,2]$

3. Să se arate că numărul $|\sqrt{5}-3|+\frac{4}{3-\sqrt{5}}$ este întreg. (Evaluare Națională, 2012, subiect de rezervă).

[14] http://mate.info.ro/Materials.aspx?Categ=1, Numere iraţionale

Soluție. $\sqrt{5}-3<0\Rightarrow\left|\sqrt{5}-3\right|=-\left(\sqrt{5}-3\right)=3-\sqrt{5}$. Avem

$$\left|\sqrt{5}-3\right|+\frac{4}{3-\sqrt{5}}=3-\sqrt{5}+\frac{4\left(3+\sqrt{5}\right)}{\left(3-\sqrt{5}\right)\left(3+\sqrt{5}\right)}=3-\sqrt{5}+\frac{4\left(3+\sqrt{5}\right)}{9-5}=3-\sqrt{5}+3+\sqrt{5}=6\in\mathbb{N}$$

4. Arătați că $a=2(8+\sqrt{18})-3(4+\sqrt{8})$ este număr întreg. (Evaluare Națională, 2012, sesiunea specială).

Soluție. $a=2\left(8+3\sqrt{2}\right)-3\left(4+2\sqrt{2}\right)=16+6\sqrt{6}-12-6\sqrt{6}=4\in\mathbb{Z}$

5. Calculați media geometrică a numerelor $a=3\sqrt{7}-\sqrt{63}+24; b=\sqrt{10}-\left|3-\sqrt{10}\right|$. (Simulare Evaluare Națională, Iași).

Soluție. $m_g=\sqrt{ab}, a,b\geq 0.$

$a=3\sqrt{7}-3\sqrt{7}+24=24; b=\sqrt{10}-\left(-(3-\sqrt{10})\right)=\sqrt{10}+3-\sqrt{10}=3$, prin urmare avem

$m_g=\sqrt{24\cdot 3}=6\sqrt{2}$

6. Arătați că numărul $a=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(5-\sqrt{6}\right)+\left(\sqrt{2}-1\right)^2-3\sqrt{3}$ este natural. (Evaluare Națională, 2011).

Soluție. După desfințarea parantezelor, obținem

$a=5\sqrt{3}-\sqrt{18}+5\sqrt{2}-\sqrt{12}+2-2\sqrt{2}+1-3\sqrt{3}\ \Rightarrow a=3\in\mathbb{N}$.

7. Se consideră mulțimea $A=\left\{x\in\mathbb{N}\mid 2x\leq 4\right\}$. Enumerați elementele mulțimii $A\cap\mathbb{N}$ (Simulare Evaluare Națională, 2011, Dolj).

Soluție. $2x\leq 4\Leftrightarrow x\leq 2\Leftrightarrow x\in(-\infty,2]; A=(-\infty,2];\ A\cap\mathbb{N}=A\cap(-\infty,2]=\{0,1,2\}$

8. Dacă $a,b\in\mathbb{Q}_+$ iar $\sqrt{a}+\sqrt{b}\in\mathbb{Q}_+$ atunci $\sqrt{a},\sqrt{b}\in\mathbb{Q}_+$.

Soluție. Dacă $a=b=0$, evident. Fie $\sqrt{a}+\sqrt{b}=r>0$ atunci din formula

$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$, obținem $\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{a-b}{r}\in\mathbb{Q}$ astfel că, prin adunare, deducem

$\sqrt{a}\in\mathbb{Q}_+$, iar prin scădere deducem $\sqrt{b}\in\mathbb{Q}_+$

9. Dacă $a,b\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$ si $a+b\in\mathbb{Z}$ iar $x,y\in\mathbb{Q}, x\neq y$, atunci $ax+by\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$

Soluție. $ax+by=ax+bx-bx+by=x(a+b)-b(x-y)\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$

10. Dacă *x,y* sunt numere iraţionale astfel încât $x+y\in\mathbb{Z}$ şi $\frac{x}{y}\in\mathbb{Z}$, aflaţi $x^{2011}+y^{2011}$.

Soluție. $\frac{x+y}{y}=\frac{x}{y}+1=\frac{1}{y}(x+y)$. Membrul stâng este din $\mathbb{Q}$ iar cel drept din $\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Q}$ astfel că $x+y=0$ de unde $x=-y$. Atunci $x^{2011}+y^{2011}=x^{2011}+(-x)^{2011}=x^{2011}-x^{2011}=0$

11.Arătaţi că $\sqrt{\frac{n^2+1}{7}}\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Q}$ pentru orice număr natural n.

Soluție. $\sqrt{\frac{n^2+1}{7}}=\frac{\sqrt{7(n^2+1)}}{7}$. Analizând cazurile $n=7k+r$, $r\in\{0,1,..,6\}$, deducem că n^2+1 nu este divizibil cu 7 de unde concluzia.

12.Găsiţi $n\in\mathbb{Q}\setminus\{-5\}$, dacă $\sqrt{\frac{4n-2}{n+5}}\in\mathbb{Q}$

Soluție. Fie $\sqrt{\frac{4n-2}{n+5}}=\frac{a}{b};(a,b)=1,b\neq 0$. Atunci

$$\frac{4n-2}{n+5}=\frac{a^2}{b^2}\Rightarrow(4n-2)b^2=(n+5)a^2\Rightarrow 4nb^2-2b^2=na^2+5a^2$$

$$\Rightarrow n(4b^2-a^2)=5a^2+2b^2\Rightarrow n=\frac{5a^2+2b^2}{4b^2-a^2}=-5+\frac{22b^2}{4b^2-a^2}$$

Pentru ca n să fie număr întreg este necesar ca 22 să fie divizibil prin $4b^2-a^2$ deoarece $(b^2,4b^2-a^2)=1$. Analizand cazurile $4b^2-a^2\in\{1,2,11,22\}$ deducem ca numai $b=3$, $a=5$ iar $n=13$ convine.

13. Fie $A=\{x,y,z\},x\in\mathbb{Q}$. Dacă $y+\sqrt{x^2+1}\in\mathbb{Q},z+\sqrt{y^2+1}\in\mathbb{Q}$ arătaţi că $A\setminus\mathbb{Q}\neq\varnothing$.

Soluție. Dacă $y\notin\mathbb{Q}$, atunci $y\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Q}$ iar $A\setminus\mathbb{Q}\neq\varnothing$. Dacă $y\in\mathbb{Q}\Rightarrow y\in\mathbb{Q}$, deci, $(y-x)(y+x)=1$ de unde, $x=0$, $y=1$, $z=\sqrt{2}$, iar $A\setminus\mathbb{Q}\neq\varnothing$

14. Justificaţi că următoarele numere sunt iraţionale:

$a=\sqrt{10!};b=\sqrt{n+\sqrt{n+1}};c=\sqrt{9n^2+n};$ $e=\sqrt{63+\sqrt{39+\sqrt{5}}};$

$g=\sqrt{4+\sqrt{7+\sqrt{8}}};$ $j=\sqrt{555.....5};$

$r=\sqrt{11+\sqrt{4+2\sqrt{2}+2\sqrt{2}}};$ $q=\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{3}}};$

$s=\sqrt{2008^{2008}+2009^{2009}};$ $t=0,101001000100.....$

Soluție. Se aplică cele cinci metode folosite pentru a arata că $\sqrt{a}\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Q}$, prezentate mai sus.

Trecând de la gimnaziu către liceu, observăm, în primul rând, că se face o diferenţiere a materiei predate astfel, planurile cadru pentru clasele a IX-a şi a X-a liceu (anexa 1 la OMECT 5723/23.12.2004) sunt structurate pe trei componente: trunchi comun (TC), curriculum diferenţiat (CD) şi curriculum la decizia şcolii (CDŞ). Programa şcolară de Matematică este structurată pe formarea de competenţe (ansambluri structurate de cunoştinţe şi deprinderi dobândite prin învăţare) şi este structurată pe un acelaşi ansamblu de şase competenţe generale, indiferent de specialitatea urmată:

1.Identificarea unor date şi relaţii matematice şi corelarea lor în funcţie de contextul în care au fost definite;

2. Prelucrarea datelor de tip cantitativ, calitativ, structural, contextual cuprinse în enunţuri matematice;

3. Utilizarea algoritmilor şi a conceptelor matematice pentru caracterizarea locală sau globală a unei situaţii concrete;

4. Exprimarea caracteristicilor matematice cantitative sau calitative ale unei situaţii concrete şi a algoritmilor de prelucrare a acestora;

5. Analiza şi interpretarea caracteristicilor matematice ale unei situaţii-problemă;

6. Modelarea matematică a unor contexte problematice variate, prin integrarea cunoştinţelor din diferite domenii.

Competențele specifice diferă pentru cele trei componente, cu precadere la compețentele generale 2, 3 si 4, iar conținuturile sunt, după cum urmează:

Trunchi comun– 2 ore	Trunchi comun (2 ore) și curriculum diferentiat (1 oră)	Trunchi comun (2 ore) și curriculum diferențiat (2 ore)
Mulţimi şi elemente de logică matematică • Mulţimea numerelor reale: operaţii algebrice cu numere reale, ordonarea numerelor reale, modulul unui număr real, aproximări prin lipsă sau prin adaos; operaţii cu intervale de numere reale	**Mulţimi şi elemente de logică matematică** • Mulţimea numerelor reale: operaţii algebrice cu numere reale, ordonarea numerelor reale, modulul unui număr real, aproximări prin lipsă sau prin adaos; operaţii cu intervale de numere reale	**Mulţimi şi elemente de logică matematică** • Mulţimea numerelor reale: operaţii algebrice cu numere reale, ordonarea numerelor reale, modulul unui număr real, aproximări prin lipsă sau prin adaos, partea întreagă, partea fracţionară a unui număr real; operaţii cu intervale de numere reale

Se observă că, la cea de a treia componentă, trunchi comun (2 ore) și curriculum diferențiat (2 ore), apar noțiunile de partea întreagă și partea fracționară a unui număr real. Ele au fost introduse și în gimnaziu, dar, doar la nivel de definiție. Printre aplicații, găsim[15]:

1. Să se arate că daca $x, y \in \mathbb{R}$ si [x]=[y], atunci $|x-y|<1$

Soluție. Avem $x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow x=[x]+\{x\}, y=[y]+\{y\}$. Deci

$x-y=[x]+\{x\}-[y]-\{y\}=\{x\}-\{y\} \in (-1,1)$ Prin urmare, $|x-y|<1$.

Observație. Reciproca acestui exercițiu este falsă, deoarece, luând, de exemplu, x = 2,3, cu $[x]$ = 2 și y = 3,2 cu $[y]$ = 3, avem $|x-y|$ = 0,9 < 1, dar $[x] \neq [y]$

2. Să se arate că $\{x\}=\{y\} \Leftrightarrow x-y \in \mathbb{Z}, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Soluție. Avem $x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow x=[x]+\{x\}, y=[y]+\{y\}$.

Dacă $\{x\}=\{y\}$, atunci $x-y=[x]-[y] \in \mathbb{Z}$.

Dacă $x-y \in \mathbb{Z}$, atunci avem $x-y=[x]+\{x\}-[y]-\{y\} \in \mathbb{Z}$, dar $[x],[y] \in \mathbb{Z}$, deci, $\{x\}-\{y\} \in \mathbb{Z}$ Dar, $\{x\},\{y\} \in [0,1)$, deci, $\{x\}-\{y\} \in (-1,1)$ si din $\{x\}-\{y\} \in \mathbb{Z}$, rămâne că $\{x\}-\{y\}=0$, adică $\{x\}=\{y\}$

3. Să se arate că, oricare ar fi numarul real x, are loc identitatea: $[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]$

(Hermite).

Soluție. $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x=[x]+\{x\}$. Avem cazurile:

a) $0 \leq \{x\} < \frac{1}{2}$. Atunci, $x+\frac{1}{2}=[x]+\{x\}+\frac{1}{2}<[x]+1$. Cum $x \geq [x]$, obtinem $\left[x+\frac{1}{2}\right]=[x]$.

Identitatea devine: $[x]+[x]=[2x]$, dar $[2x]=2[x]$, deci cei doi membrii sunt egali.

b) $\frac{1}{2} \leq \{x\} < 1$. Atunci $\left[x+\frac{1}{2}\right]=[x]+1$. Identitatea devine: $[x]+[x]+1=[2x]$, dar

$[2x]=2[x]+1$,, deoarece $2x=2([x]+\{x\})=2[x]+2\{x\}$ si

$2[x]+1 \leq 2x=2[x]+2\{x\}<2[x]+2$. Deci cei doi membrii sunt egali.

4. Să se rezolve ecuația: $\frac{1}{\{x\}}=\frac{1}{x}+\frac{1}{[x]}$

Soluție. Avem condițiile de existență: $\{x\} \neq 0, x \neq 0, [x] \neq 0 \Rightarrow x \notin \mathbb{Z} \cup (0,1)$. Cum membrul stâng este pozitiv, avem că ecuația nu are soluții negative. Dacă x>2, atunci $[x] \geq 2$, iar

[15] Mircea Ganga, Matematică, Manual pentru clasa a IX-a, Editura Mathpress, Ploieşti, 2001, pag 61-64

$\frac{1}{x}+\frac{1}{[x]}<1$ și $\frac{1}{\{x\}}>1$. Rămâne că $x\in(1,2)$, când [x] = 1. Ecuația devine

$$\frac{1}{x-1}=\frac{1}{x}+1\Rightarrow x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

5. Să se demonstreze egalitatea: $\left[\sqrt{1\cdot 2}\right]+\left[\sqrt{2\cdot 3}\right]+\left[\sqrt{3\cdot 4}\right]=6$.

Soluție. Avem inegalitățile: $1<\sqrt{1\cdot 2}<2, 2<\sqrt{2\cdot 3}<3, 3<\sqrt{3\cdot 4}<4$, de unde, deducem $\left[\sqrt{1\cdot 2}\right]=1, \left[\sqrt{2\cdot 3}\right]=2, \left[\sqrt{3\cdot 4}\right]=3$, adică avem egalitatea.

Observație. Generalizând, obținem $\left[\sqrt{1\cdot 2}\right]+\left[\sqrt{2\cdot 3}\right]+...+\left[\sqrt{n\cdot(n+1)}\right]=\frac{n(n+1)}{2}, \forall n\in\mathbb{N}$

6. Să se arate că $[x]+[y]\le[x+y]\le[x]+[y]+1, \forall x, y\in\mathbb{R}$

Soluție. Avem $x=[x]+\{x\}, y=[y]+\{y\}$. Prin urmare, obținem:

$[x+y]=\left[[x]+\{x\}+[y]+\{y\}\right]=[x]+[y]+\left[\{x\}+\{y\}\right]$.

Dar $\{x\},\{y\}\in[0,1)\Rightarrow\{x\}+\{y\}\in[0,2)\Rightarrow\left[\{x\}+\{y\}\right]\in\{0,1\}$. De unde, avem concluzia.

La nivelul clasei a X-a, competențele generale sunt aceleași pentru toate componentele și identice cu cele de la clasa a IX-a. Întâlnim capitolul „Numere reale”, cu urmatoarele conținuturi: proprietăţi ale puterilor cu exponent raţional, irațional și real ale unui număr pozitiv, aproximări raționale pentru numere iraționale sau reale, radical dintr-un număr rațional, $n \geq 2$, proprietăţi ale radicalilor, noţiunea de logaritm, proprietăţi ale logaritmilor, calcule cu logaritmi, operaţia de logaritmare.

Competențele specifice diferă pentru cele trei componente, după cum urmează:

Trunchi comun– 2 ore	Trunchi comun (2 ore) și curriculum diferentiat (1 oră)	Trunchi comun (2 ore) și curriculum diferențiat (2 ore)
1.Identificarea caracteristicilor tipurilor de numere utilizate în algebră şi a formei de scriere a unui număr real în contexte variate	1.Identificarea caracteristicilor tipurilor de numere utilizate în algebră şi formei de scriere a unui număr real sau complex în contexte specifice.	1.Identificarea caracteristicilor tipurilor de numere utilizate în algebră şi formei de scriere a unui număr real sau complex în contexte specifice.

2.Compararea și ordonarea numerelor reale utilizând metode variate. 3.Aplicarea unor algoritmi specifici calculului cu puteri, radicali și logaritmi în contexte variate 4.Alegerea formei de reprezentare a unui număr real pentru optimizarea calculelor 5.Alegerea strategiilor de rezolvare în vederea optimizării calculelor 6.Analiza validităţii unor afirmaţii prin utilizarea aproximărilor, a proprietăţilor sau a regulilor de calcul	2.Compararea și ordonarea numerelor reale utilizând metode variate. 3.Aplicarea unor algoritmi specifici calculului puteri, radicali, logaritmi sau numere complexe în contexte variate. 4.Alegerea formei de reprezentare a unui număr real sau complex în vederea optimizării calculelor. 5.Alegerea strategiilor de rezolvare în vederea optimizării calculelor. 6.Determinarea unor analogii între proprietăţile operaţiilor cu numere reale şi complexe scrise în forme variate şi utilizarea acestora în rezolvarea unor ecuaţii.	2.Determinarea echivalenţei între forme diferite de scriere a unui număr, compararea și ordonarea numerelor reale. 3.Aplicarea unor algoritmi specifici calculului cu numere reale sau complexe pentru optimizarea unor calcule și rezolvarea de ecuaţii. 4.Alegerea formei de reprezentare a unui număr real sau complex funcție de contexte în vederea optimizării calculelor 5.Alegerea strategiilor de rezolvare în vederea optimizării calculelor. 6.Determinarea unor analogii între proprietăţile operaţiilor cu numere reale sau complexe scrise în forme variate şi utilizarea acestora în rezolvarea unor ecuaţii.

Ca o noutate pentru elevul de liceu, apare noţiunea de logaritm. Introdusă din necesitatea rezolvării ecuațiilor de forma $a^x = b$, cu $(a, b) = 1$, se definește logaritmul lui b în baza a numărul real, unic, x care verifică egalitatea $a^x = b$, unde $a > 0$, $a \neq 1$ și $b > 0$.

Avem că $a^{\log_a b} = b, \log_a a = 1, \log_a 1 = 0$

Ca aplicații ale noțiunii de logaritm, găsim[16]:

1. Să se calculeze: $\log_2 \sqrt{2} + \log_2 \sqrt{2+\sqrt{2}} + \log_2 \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} + \log_2 \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$.

[16] Mircea Ganga - Matematică, Manual pentru clasa a X-a, Algebra,Editura Mathpress, Ploiești, 2002, pag 72

Soluție. Aplicând formula de restrângerea a sumei de logaritmi, obținem:

$\log_2\sqrt{2}+\log_2\sqrt{2+\sqrt{2}}+\log_2\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\log_2\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}=$

$=\log_2\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$. Efectuand înmulțirile convenabil, avem:

$\log_2\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{4-\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^2}=\log_2\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{4-2-\sqrt{2}}=\log_2\sqrt{2}\sqrt{2^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=$

$=\log_2\sqrt{2}\sqrt{2}=\log_2 2=1$

2. Calculați $[\log_2 25]$.

Soluție. Ideea este de a încadra numărul 25 între două puteri consecutive ale lui 2. Avem $2^4<25<2^5$. Dacă $\log_2 25=x\Rightarrow 2^x=25\Rightarrow 2^4<2^x<2^5\Rightarrow 4<x=\log_2 25<5$. Prin urmare, $[\log_2 25]=4$.

3. Să se arate că numărul $\log_2 5$ este irațional.

Soluție. Presupunem, prin reducere la absurd, că $\log_2 5$ ar fi rațional. Deci,

$\log_2 5=\frac{a}{b}, a,b\in\square^*, (a,b)=1$. De aici, $2^{\frac{a}{b}}=5$, sau , prin ridicarea egalității la puterea *b*, rezultă $2^a=5^b$. Dar, membrul dreapt este un multiplu de 5, iar membrul stâng nu se divide prin 5, deci avem contradicție.

Observație. Genelalizând, $\log_a b\in\square\setminus\square\Leftrightarrow(a,b)=1,\forall a>0,\ a\neq 1,\ b>0$

4. Fie triunghiul *ABC*, dreptunghic în *C*, de laturi *a,b,c*. Daca *c* > *b*, *c* - *b* $\neq 1$, *c* + *b* $\neq 1$, atunci $\log_{c+b}a+\log_{c-b}a=2\log_{c+b}a\log_{c-b}a$.

Soluție. Folosind formula de schimbare a bazei, obținem:

$$\log_{c+b}a+\log_{c-b}a=2\log_{c+b}a\log_{c-b}a\Leftrightarrow\frac{\log_a a}{\log_a(c+b)}+\frac{\log_a a}{\log_a(c-b)}=2\frac{\log_a a}{\log_a(c+b)}\frac{\log_a a}{\log_a(c-b)}$$

Tinând cont că $\log_a a=1$ și aducând la același numitor, obținem: $\log_a(c+b)+\log_a(c-b)=2$, adică $\log_a(c+b)(c-b)=2\Leftrightarrow a^2=c^2-b^2\Leftrightarrow a^2+b^2=c^2\Leftrightarrow$ triunghiul *ABC* este dreptunghic în *C*.

Trecând la clasele a XI-a și a XII-a, întâlnim cinci tipuri de programe şcolare:

Matematică- programa 1

Filiera *teoretică*, profil *real*, specializarea *matematică-informatică*: 4 ore / săpt. (TC + CD)

Filiera *vocaţională*, profil *militar MApN*, specializarea *matematică-informatică*: 4 ore / săpt. (CD)

Matematică- programa 2

Filiera *teoretică*, profil *real*, specializarea *ştiinţe ale naturii:* 3 ore / săpt. (TC + CD)

Filiera *tehnologică*, toate calificările profesionale*:* 3 ore / săpt. (TC)

Matematică- programa 3

Filiera *vocaţională*, profil *artistic*

Specializările *Arhitectură, Arte ambientale, Design:* 2 ore/săpt. (CD)

Matematică- programa 4

Filiera *vocaţională*, profil *pedagogic*, toate specializările: 1 oră/săptămână (TC)

Filiera *vocaţională*, profil *sportiv*, toate specializările: 1 oră/săptămână (TC)

Matematică- programa 5

Curriculum diferenţiat (CD): 2 ore/săptămână

Filiera *teoretică*, profil *umanist*, specializarea *ştiinţe sociale*

Filiera *vocaţională*, profil *militar M.A.I.*, specializarea *ştiinţe sociale*

Filiera *vocaţională*, profil *teologic*, toate specializările, cu excepţia specializărilor *teologie ortodoxă* și *patrimoniu cultural*

În cadrul materiei de clasa a XI-a, competențele sunt foate diferite, funcție de profil, astfel, la Programele 1, 2 și 3, la capitolul „Limite de funcții", apar conținuturile: Noţiuni elementare despre mulțimi de puncte pe dreapta reală: intervale, mărginire, vecinătăţi, dreapta încheiată, simbolurile $+\infty$ şi $-\infty$, limite de funcți: interpretarea grafică a limitei într-un punct utilizând vecinătăţi, limite laterale pentru: funcția de gradul I, funcția de gradul al II-lea, funcția logaritmică, exponenţială, funcția putere ($n = 2, 3$), funcţia radical ($n = 2, 3$), funcția raport de două funcți cu grad cel mult 2.

La Programa 4, apare capitolul „Structuri algebrice", cu următoarele conținuturi: Legi de compoziţie, proprietăţi. Structuri algebrice: monoid, grup, inel, corp, iar la Programa 5 nu apare nici o referire la mulțimea numerelor reale, în schimb, la Filiera *vocaţională*, profil *pedagogic*, specializarea *învăţător-educatoare*, întâlnim, materia *Aritmetică,* cu următoarele două capitole: „Mulţimea numerelor naturale", cu conținuturi ce definesc operațiile algebrice și de ordine, precum și proprietățile acestei mulțimi și „Mulțimea numerelor raționale pozitive". Competențele generale pentru *Aritmetică* sunt:

1. Identificarea relațiilor între noţiunile matematice studiate
2. Prelucrarea datelor de tip cantitativ, calitativ, structural sau contextual cuprinse în enunţuri matematice
3. Utilizarea conceptelor matematice, a algoritmilor de calcul pentru caracterizarea locală sau globală a unei situaţii concrete

4. Analiza unor situaţii problemă pentru determinarea strategiilor de rezolvare

5. Generalizarea unor algoritmi de lucru prin modificarea contextului iniţial de definire a problemei.

La capitolul „Limite de funcții”, întâlnim, la programele 1, 2 și 3, prezentată definiția axiomatică a mulțimii numerelor reale prin cele trei grupe de axiome: pentru structura de ordine, pentru structura algebrică și pentru completitudinea lui $\mathbb{R}$.

Proprietățile algebrice și de ordine ale lui $\mathbb{R}$

Adunarea pe $\mathbb{R}$ are proprietățile:

A1. Este asociativă: $a+(b+c) = (a+b)+c,\ \forall a,b,c \in \mathbb{R}$

A2. Este comutativă: $a+b = b+a,\ \forall a,b \in \mathbb{R}$

A3. Numărul real 0 este element neutru: $a+0 = 0+a = a,\ \forall a \in \mathbb{R}$

A4. $\forall a \in \mathbb{R}$ are un opus, notat $-a$: $a+(-a)=(-a)+a = 0$

Notăm $a + (-b) = a - b$

Înmulțirea pe $\mathbb{R}$ are proprietățile:

I1. Este asociativă: $a(bc) = (ab)c,\ \forall a,b,c \in \mathbb{R}$

I2. Este comutativă: $ab = ba,\ \forall a,b \in \mathbb{R}$

I3. Numărul real 1 este element neutru: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a,\ \forall a \in \mathbb{R}$

I4. $\forall a \in \mathbb{R}^*$ are un invers, notat a^{-1}: $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$

D. Este distributivă față de adunare: $a\,(b+c) = ab+ac,\ \forall a,b,c \in \mathbb{R}$

Notăm $a \cdot b^{-1} = a:b = \frac{a}{b}, b \neq 0$

Relația de ordine $<$ pe $\mathbb{R}$ are proprietățile:

1. $a \not< a, \forall a \in \mathbb{R}$ (este ireflexiva)

2.Dacă $a < b \Rightarrow b > a, \forall a,b \in \mathbb{R}$

3.Dacă $a < b, b < c \Rightarrow a < c, \forall a,b,c \in \mathbb{R}$ (este tranzitivă)

4.Dacă $a < b,\ c \in \mathbb{R}$, atunci $a+c < b+c$

5. Dacă $a < b,\ c > 0$, atunci $ac < bc$

6. Dacă $a < b,\ c < 0$, atunci $ac > bc$

7. Dacă $a < b$, $c < d$, atunci $a+c < b+d$ și $a-d < b-c$.

8. Dacă $a < b$, $c < d$, $a,b,c,d \in \mathbb{R}_+^*$, atunci $a\,c < bc$ și $\frac{a}{d} < \frac{b}{c}$

9. $0 < a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}, \forall a,b \in \mathbb{R}^*$

Axioma lui Arhimede. Oricare ar fi numerele reale $x > 0$ și y, există un număr natural n astfel încât $nx > y$.

În particular, pentru $x = 1$, oricare ar fi numărul real y, există un număr natural n, $n>x$. Relația $\leq$ are proprietățile:

1. $a \leq a, \forall a \in \mathbb{R}$ (este reflexivă)

2. Dacă $a \leq b, b \leq a \Rightarrow a = b, \forall a,b \in \mathbb{R}$ (este antisimetrică)

3. Dacă $a \leq b, b \leq c \Rightarrow a \leq c, \forall a,b,c \in \mathbb{R}$ (este tranzitivă)

4. Dacă $a \leq b$, $c \in \mathbb{R}$, atunci $a+c \leq b+c$

5. Dacă $a \leq b$, $c \geq 0$, atunci $ac \leq bc$

6. Dacă $a \leq b$, $c \leq 0$, atunci $ac \geq bc$

7. Dacă $a \leq b$, $c \leq d$, atunci $a+c \leq b+d$ și $a-d \leq b-c$

8. Dacă $a \leq b$, $c \leq d$, $a,b,c,d \in \mathbb{R}_+^*$, atunci $ac \leq bc$ și $\frac{a}{d} \leq \frac{b}{c}$

9. $0 < a \leq b \Rightarrow \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b} > 0, \forall a,b \in \mathbb{R}^*$

Este ușor de observat că, dacă, în locul lui $\mathbb{R}$ se pune $\mathbb{Q}$, axiomele de mai sus sunt adevărate. Faptul că există numere care nu sunt raționale, arată necesitatea unei proprietăți care să caracterizeze mulțimea numerelor reale, care să diferențieze mulțimea $\mathbb{R}$ de $\mathbb{Q}$. Proprietatea esențială a multiținii $\mathbb{R}$, care nu se verifică în multimea $\mathbb{Q}$, o constituie următoarea axiomă:

Axioma de completitudine (Cantor-Dedekind). Orice mulțime nevidă, minorată, are o margine inferioară în $\mathbb{R}$.

Pentru a putea fi enunțată la clasă, se definesc noțiunile de margini ale unei mulțimi, supremum și infimum.[17]

Mulțimea $(\mathbb{R},+,\cdot,\leq)$ este un corp ordonat. Dacă se adaugă și axioma de completitudine, atunci, se spune că $\mathbb{R}$ este un corp complet ordonat.

[17]Mircea Ganga - Matematică,Manual pentru clasa a XI-a,Elemente de Analiză Matematică, Editura Mathpress, Ploiești, 2005, pag. 173

Exemplu. Dacă $A=\left\{x\in\mathbb{Q}\mid x\geq 0, x^2\leq 3\right\}=[0,\sqrt{3}]\cap\mathbb{Q}$, $B=\left\{x\in\mathbb{Q}\mid x\geq 0, x^2\leq 3\right\}=[0,\sqrt{3}]$, avem că $\sup A=\sup B=\sqrt{3}$, dar *A*, ca submulțime a lui $\mathbb{Q}$, nu are margine superioară, în timp ce *B*, ca submulțime a lui $\mathbb{Q}$ are margine superioară pe $\sqrt{3}$.

Marginile unei mulțimi nemărginite. Dreapta reală încheiată

Fie $-\infty,\infty$ două elemente diferite și care nu sunt numere reale. Notăm $\overline{\mathbb{Q}}=\mathbb{Q}\cup\{-\infty\}\cup\{\infty\}$. Extindem la $\overline{\mathbb{Q}}$ relația de ordine din $\mathbb{Q}$, punând prin definiție $-\infty<x,\forall x\in\mathbb{Q}$, $x<\infty,\forall x\in\mathbb{Q}$ și $-\infty<\infty$. Mulțimea $\overline{\mathbb{Q}}$ împreună cu relația de ordine se numește <u>dreapta reală incheiată.</u>

Propoziție. Orice parte nevida a lui $\overline{\mathbb{Q}}$ admite margine superioară (respectiv inferioară).

Demonstrație. Fie $\phi\neq A\subset\overline{\mathbb{Q}}$. Dacă $A\subset\mathbb{Q}$ este majorată de un element din $\mathbb{Q}$, atunci *A* admite margine superioară în $\mathbb{Q}$. Dacă *A* nu este majorată de nici un element din $\mathbb{Q}$, adică $\forall r\in\mathbb{Q}\Rightarrow\exists a_r\in A, a_r>r$, atunci ∞ este marginea superioară în $\overline{\mathbb{Q}}$ a lui *A*. Dacă $\infty\in A$, atunci ∞ este cel mai mare element al lui A, deci marginea superioară a lui *A*. Analog se demonstrează și existența marginii inferioare.

Adunarea și înmulțirea din $\mathbb{Q}$ se extind și în $\overline{\mathbb{Q}}$ luând prin definiție:

$x+\infty=\infty+x=\infty\ (x\neq-\infty)$

$x+(-\infty)=(-\infty)+x=-\infty\ (x\neq\infty)$

$$x\cdot\infty=\begin{cases}\infty, x>0\\ -\infty, x<0\end{cases}$$

$$x\cdot(-\infty)=\begin{cases}-\infty, x>0\\ -\infty, x<0\end{cases}$$

$$\frac{x}{\pm\infty}=0\ (x\in\mathbb{Q})$$

Nu putem defini coerent operațiile: $\infty+(-\infty),(-\infty)+\infty,(\pm\infty)0,0(\pm\infty),\frac{\pm\infty}{\pm\infty},\infty^0,1^{\pm\infty}$. De asemenea, nu putem defini nici operațiile: $\frac{0}{0},0^0$

$-\infty,\infty$ se numesc numere reale infinite.

Relația de ordine de pe $\mathbb{R}$ se extinde la $\overline{\mathbb{R}}$, astfel, pentru $\forall x \in \mathbb{R}, x < \infty, -\infty < x, -\infty < \infty$.

Ca aplicații la acest capitol, găsim[18]:

1. Se consideră mulțimea: $A = \left\{ \frac{n+2}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$. Să se arate că sup A = 3 și inf A = 1.

Soluție. Arătăm că 3 este un majorant pentru A. Verificăm $\frac{n+2}{n} \le 3 \Leftrightarrow n+2 \le 3n \Leftrightarrow n \ge 1$, ceea ce este evident. Verificăm dacă 3 este cel mai mic majorant pentru A. Fie, prin absurd, $\alpha < 3$, majorant pentru A. Deci $\frac{n+2}{n} \le \alpha \Rightarrow n \ge \frac{2}{\alpha - 1}$, ceea ce este fals, deoarece, pentru n=1, se obține $\alpha \ge 3$, contradicție. Deci sup A = 3.

Arătăm că 1 este minorant pentru mulțimea A. Avem $1 \le \frac{n+2}{n} \Leftrightarrow n \le n+2$, ceea ce este evident. Verificăm dacă 1 este cel mai mare minorant. Fie, prin absurd, $\beta > 1$, minorant pentru A. Deci $\beta \le \frac{n+2}{n} \Leftrightarrow n(\beta - 1) \le 2 \Leftrightarrow n \le \frac{2}{\beta - 1}$, ceea ce este fals, deoarece, $\frac{2}{\beta - 1}$ este un număr pozitiv fixat, iar $n \in \mathbb{N}^*$, mulțime nemărginită superior. Deci inf A = 1.

2. Fie $A \subset \mathbb{R}$ o mulțime mărginită. Să se arate că orice submulțime a lui A este mărginită.

Soluție. Dacă mulțimea A este mărginită, atunci există $a < b, A \subset [a,b]$ și, dacă, $B \subset A$, atunci $B \subset [a,b]$, deci B este mărginită.

3. Să se determine minoranții și majoranții min A, max A (dacă există) pentru următoarele submulțimi A ale dreptei reale:

a) $A = [-1,1]$; b) $A = (0,100)$; c) $A = \{\cos 1, \cos 2, \cos 3\}$;

d) $A = \{\sin 1, \sin 2, \sin 3\}$; e) $A = [-2,2) \cup (3,4)$; f) $A = \left\{ 1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*, n \ge 1 \right\}$.

Soluție. a) Minoranții lui A sunt numerele $x \le -1$, iar majoranții lui A sunt numerele $x \ge 1$; min A = -1, max A = 1.

b) Minoranții lui A sunt numerele $x \le 0$, iar majoranții lui A sunt numerele $x \ge 100$; min A și max A nu există

[18] Gh.Gussi și colectiv- Matematică, Manual pentru clasa a XI-a, Elemente de Analiză Matematică, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1991, pag 28

c) Cum numărul 1 aparține primului cadran avem $0<\cos 1$. Numerele 2 și 3 aparțin cadranului doi, unde funcția cosinus este negativă descrescătoare, deci, din $0<2<3 \Rightarrow \cos 3<\cos 2<0$, prin urmare, $\cos 3<\cos 2<0<\cos 1$, adică min $A=\cos 3$ și max $A=\cos 1$.

d) În primele două cadrane funcția sinus este pozitivă, deci $\sin 1, \sin 2, \sin 3>0$. Reducând la primul cadran 2 și 3, folosind formula $\sin x=\sin(\pi-x), \forall x \in\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, avem $\sin 2=\sin(\pi-2) \square \sin 1,14$ și $\sin 3=\sin(\pi-3) \square \sin 0,14$. Dar $0,14<1<1,14$ și cum funcția sinus este crescătoare în primul cadran obținem $\sin 0,14<\sin 1<\sin 1,14$, adică $\sin 3<\sin 1<\sin 2$. Prin urmare min $A=\sin 3$ și max $A=\sin 2$.

e) Minoranții lui A sunt numerele $x \leq -2$, iar majoranții lui A sunt numerele $x \geq 4$; min A = -2, max A nu există.

f) Avem $A=\left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, ..., \frac{n-1}{n}, ...\right\}$. Prin urmare minoranții lui A sunt numerele $x \leq 0$, iar majoranții lui A sunt numerele $x \geq 1$; min A = 0, iar max A nu există.

4. Să se determine punctele de acumulare și punctele izolate ale submulțimilor A ale mulțimii numerelor reale:

a) $A=[-1,1]$; b) $A=(-\infty,1) \cup(5, \infty)$; c) $A=\square$; d) $A=\left\{\frac{1}{x} \mid x \in \square^{*}\right\}$;

e) $A=\left\{\frac{1}{n} \mid n \in \square, n \geq 1\right\}$.

Soluție. a) Puntele de acumulare pentru mulțimea A sunt punctele intervalului $[-1,1]$, nu are puncte izolate.

b) Punctele de acumulare pentru mulțimea A sunt punctele intervalului $A=(-\infty,1] \cup[5, \infty)$, nu are puncte izolate.

c) Puntele de acumulare pentru mulțimea A sunt $\pm\infty$, toate punctele corespunzătoare elementelor lui $\square$ sunt izolate.

d) Puntele de acumulare pentru mulțimea A sunt punctele mulțimii $\overline{\square}$, nu are puncte izolate.

e) Singurul punct de acumulare este originea, iar punctele izolate sunt toate punctele corespunzătoare mulțimii A.

În cadrul materiei de clasa a XII-a, competențele sunt foate diferite, funcție de profil, astfel, la Programele 1, 2 și 3, găsim capitolele: „Grupuri”, „Inele și corpuri” și „Inele de polinoame cu coeficienți într-un corp comutativ ($\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p$, p prim)”

La Programele 3 și 4 nu apar conținuturi legate de teoria numerelor reale, în schimb, la programa 5, întâlnim capitolul: „Structuri algebrice: monoid, grup, inel, corp”.

Prin conținuturile elementelor de algebră de la nivelul clasei a XII-a se definesc structurile algebrice, de la monoid pâna la corp. Ca o aplicație a acestor noțiuni, mă voi opri asupra asemănărilor/deosebirilor dintre domeniile de integritate și corpuri[19].

Fie inelul $(A,+,\cdot)$. Un element $x \in A, x \neq 0$ se numește divizor al lui zero la stânga (respectiv dreapta) dacă, există $y \in A, y \neq 0$, astfel încât, $xy = 0$ (respectiv $yx = 0$). Dacă inelul este comutativ, noțiunile de divizor al lui zero la stânga, respectiv la dreapta, coincid.

Inelul $(A,+,\cdot)$ are divizori ai lui 0 dacă conține cel puțin un divizor al lui zero.

Un inel comutativ, nenul care nu are divizori ai lui 0 se numește inel integru (domeniu de integritate).

Exemplu. 1. Inelele comutative $(\mathbb{Q},+,\cdot),(\mathbb{R},+,\cdot),(\mathbb{C},+,\cdot),(\mathbb{Z}_p,+,\cdot)$, p prim, sunt domenii de integritate.

2. În inelul $(\mathbb{Z}_6,+,\cdot)$, avem $\hat{2} \neq \hat{0}, \hat{3} \neq \hat{0},$ dar $\hat{2}\cdot\hat{3} = \hat{0},$ ceea ce arată că elementele $\hat{2}, \hat{3}$ sunt divizori ai lui zero, deci $\mathbb{Z}_6$ nu este domeniu de integritate.

3. Inelul comutativ $(\mathbb{Z},\oplus,\odot)$, unde $x \oplus y = x + y + 1, x \odot y = xy + x + y$, este fără divizori ai lui zero, deoarece, dacă $x, y \neq -1$ (-1 este elemental nul al inelului), adică $(x+1),(y+1) \neq 0$, avem $x \odot y \neq -1 \Leftrightarrow xy + x + y \neq -1 \Leftrightarrow (x+1)(y+1) \neq 0$, ceea ce este adevărat.

Teoremă. Un corp nu admite divizori ai lui zero, adică orice corp este domeniu de integritate.

Demonstrație. Într-un corp, orice element nenul este inversabil, iar un element inversabil nu poate fi divizor al lui zero într-un inel.

Teoremă. Orice domeniu de integritate finit este corp.

Demonstrație. Fie A, domeniu de integritate finit, $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}, a \in A, a \neq 0$, a arbitrar. Fie mulțimea produselor $\{aa_1, aa_2, ..., aa_n\}$. Aceste produse sunt toate distincte, deoarece , din

[19] Mircea Ganga - Matematică,Manual pentru clasa a XII-a,Elemente de Algebră, Editura Mathpress, Ploieşti, 2005, pag. 156

$aa_i = aa_j, a \neq 0 \Rightarrow a_i = a_j$ (A nu are divizori ai lui zero). Cum $aa_i \in A, \forall i$ sunt distincte două câte două, deducem că A este formată din aceste produse. În particular, unitatea inelului este unul din aceste produse, adică avem $aa_i = 1$, pentru un anume i. Cum înmulțirea în A este comutativă, avem $aa_i = a_i a = 1$, adică a_i este inversul lui a.

Teoremă (Wedderburn, 1905). Orice corp finit este comutativ.

Orientarea lecțiilor de matematică spre formarea capacității de abordare dialectică a realității trebuie realizată în contextul unei tehnologii didactice orientate spre activitatea nemijlocită a elevilor. Trebuie acționat astfel ca lecția să devină activă, participativă, conducandu-i pe elevi să stabilească legături între informații noi și datele experienței personale, să interpreteze, să caute soluții, în general, să gândească, să ia parte activă la elaborarea cunoștiințelor.

Tehnologia educației reprezintă un mod sistematic de proiectare, realizare și evaluare a întregului proces de învățare și predare sau, altfel spus, ansamblul structurat al metodelor, mijloacelor de învățământ, al strategiilor de organizare a predării-învățării, pus în aplicație în interacțiunea dintre educator și educat, printr-o strânsă corelare a lor cu competentele pedagogice, conținuturile transmise, formele de realizare a instruirii, modalitățile de evaluare.

Predarea este influențată semnificativ de proiectare. Proiectarea va afecta, într-o măsură însemnată, atât eficiența activităților de predare, cât și învățarea elevilor. Proiectarea oferă profesorului posibilitatea de a analiza și de a decide între material și metode alternative, pregătind, astfel, experiențe de învățare adecvate particularităților elevilor dintr-o clasă.

Proiectul de lecție reprezintă concretizarea coerentă a intenției educaționale formulate la nivel de capitol/proiect de lucru, concretizare care vizează organizarea activităților din sala de clasă în funcție de competențe clar formulate, de conținuturi adecvate competențelor, de nivelul și interesele elevilor.

Cea mai " sensibilă" etapă este cea a predării, căreia trebuie să i se acorde o atenție în plus. Profesorul trebuie să stăpânească bine arta interogării pentru a orienta discuțiile din sala de clasă.

Predarea este înțeleasă „ca o activitate care implică facultatea rațională a elevilor și-i respectă în calitatea lor de centre independente de gândire și de acțiune. O astfel de predare vizează, nu doar încurajarea credințelor sprijinite pe dovezi, dar, dezoltă și puterea elevilor de a strânge dovezi și de a le evalua din propria lor perspectivă".

În actul predării, pe lângă rigoare și coerență, ramâne destul loc pentru intuiție, expresivitate, improvizație și creativitate.

Metodele care au o mare valoare instructiv-educativă în predarea matematicii și, în particular, a numerelor reale sunt: conversația, problematizarea, învățarea prin redescoperire, metoda exercițiului, instruirea asistată de calculator și metode de verificare a cunoștiințelor elevilor și de evaluare a randamentului școlar.

A evalua rezultatele şcolare înseamnă a determina, a cuantifica măsura în care competenţele programului de instruire au fost atinse, precum şi eficienţa metodelor de predare-învăţare folosite. Evaluarea este o componentă esenţială a procesului de învățământ.

O evaluare corectă poate fi facută numai în condițiile unor competențe bine precizate, din care să se desprindă exact ce trebuie să facă un elev pentru a dovedi realizarea lor.

Evaluarea reprezintă un proces complex menit să măsoare și să aprecieze valoarea rezultatului sistemului de educație sau a unei părți a acestuia, eficiența resurselor, a condițiilor și a operațiilor folosite în desfășurarea activității, prin compararea rezultatelor activității instructiv-educative cu competențele propuse, cu resursele utilizate sau cu rezultatele anterioare în vederea luării deciziilor privind ameliorarea activității în etapele următoare.

Evaluarea randamentului școlar pe baza competențelor are implicații directe în formarea capacității de autoevaluare a elevului, condiție pentru stimularea și dozarea efortului său, pentru autocontrolul și spiritul autocritic necesar în acțiunile pe care le va întreprinde mai târziu.

Evaluarea reprezintă un proces continuu şi de durată, putându-se face la începutul programului de instruire, pe parcursul acestuia sau la finalul său.

În prezent, se pune tot mai mult accent pe apropierea conţinuturilor învăţării de practica învăţării eficiente. În demersul didactic, centrul acţiunii devine elevul şi nu predarea noţiunilor matematice ca atare. Accentul trece de la *ce să se înveţe*, la *în ce scop* şi *cu ce rezultate* , iar unul din obiectivele esenţiale trebuie să fie dezvoltarea permanentă a calităţii gândirii elevilor. Semnificaţia şi importanţa teoretică și practică a matematicii crescând mereu, fac din ea principalul obiect de instruire, material cu necontestate valenţe formative, sporind responsabilitatea celor chemaţi să facă matematica înţeleasă şi apreciată. În concluzie, oricare ar fi procedeele de apreciere, profesorul trebuie să-şi fixeze, pentru început, nişte criterii care să acorde o tot mai mare valoare calităţii cunoştinţelor, participării active a elevului la lecţie, deplasând accentul de pe latura informativă pe cea formativă.

Tinând seama de aceste aspecte, de importanta numerelor reale în studiul matematicii, precum și de numeroasele aplicații ale acestora atât în matematică (algebră, geometrie,

trigonometrie, analiza vectorială etc) cât și în fizică, tehnică sau astronomie, am considerat deosebit de important ca experimentul metodic din cadrul lucrării pentru gradul I să-l axez pe studiul numerelor reale și al aplicațiilor lor în matematică prin experimentarea unui set de activități independente problematizate cu referire la numerele reale.

Anexe

NUME ȘI PRENUME ELEV_____

CLASĂ a-IX-a__

DATA_____

TEST DE EVALUARE

NUMERE REALE

1) Dati exemple de:
   a. Un număr natural
   b. Un număr întreg care nu e natural;
   c. Un număr rațional care sa fie și întreg; 2.5p
   d. Un număr de forma $\sqrt{n}$ care sa fie rațional;
   e. Un număr de forma $\sqrt{n}$ care sa fie irațional.
2) Care din numerele de mai jos sunt iraționale și care sunt raționale: 1.5p

$$\sqrt{4}+\sqrt{9};\quad \sqrt{12}-2;\quad \sqrt{12}-2\sqrt{3}$$

3) Scrieti nr rațional $\frac{m}{n}$ pe care fracțiile urmatoare il reprezinta și verificati (pe foaia de testare), prin împărțire, rezultatul obtinut: 1.5p

1,25; 1,2(5); 1,(25)

4) Determinati a 2010-a zeciamala a numărului: 2,2(43). 1p
5) Specificati elementele multimilor: 2.5p

$\{x\in\mathbf{R}||x|=1\}$; $\{x\in\mathbf{Z}||x|\leq 1\}$; $\{x\in\mathbf{R}||x|=-1\}$; $\{x\in\mathbf{R}||x|\geq -1\}$; $\{x\in\mathbf{R}||x|\leq -1\}$

NOTĂ.Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 1 punct din oficiu.

Grafic de evaluare a testului

NOTA	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nr.elevi									

În funcțe de rezultatele obtinute se va intocmi un plan de masuri

COLEGIUL TEHNIC "LAZĂR EDELEANU", PLOIEŞTI

Proiect didactic

I. COORDONATE DE IDENTIFICARE

Profesor: Băşcău Cornelia
Disciplina: Matematica – algebra
Clasă : a IX-a G (M2)
Unitetea de învăţare: Mulțimi
Tema : Modulul unui număr real
Tipul de lecţie: Lectie de predare

II. COMPETENTE SPECIFICE

La finalul lectiei elevii vor fi capabili :
-sa defineasca și sa aplice notiunea de modul;
-sa expliciteze modulul unei expresii;
-sa foloseasca propietatile modulului în rezolvarea exercitiilor;
-sa rezolve ecuatii și inecuatii cu modul(e);
-sa justifice deducera unor rezultate și sa verifice corectitudinea lor;
-sa-și consolideze deprinderile de rezolvare a exercitiilor;
-sa utilizeze corect notatiile și terminologia invatata și sa le aplice în exercitii.

III. STRATEGIA DIDACTICA

Metode și procedee: conversatia**,** explicatia, exerciţiul, analiza de caz, problematizarea, expunerea, observatia.
Materiale didactice: fişa de exerciţii, manual pentru clasă aIX-a
Forma de organizare a clasei: activitate frontala combinata cu activitate individuala, expunere la tabla
Mijloace de evaluare: observatia, aprecierea

Bibliografie:

-Marius Burtea, Georgeta Burtea, Matematica, culegere pentru clasă a IX-a, Editura Carminis, Pitesti, 2005

-Petre Nachila,Ion Chesca, Matematica, Manual pentru clasă a IX-a, Editura LVS Crepuscul, Ploiesti, 2004

-Mircea Ganga, Manual pentru clasă a IX-a, EdituraMathpress, Bucuresti, 2001

IV. DESFASURAREA METODICA A LECTIEI

1. **Moment organizatoric**

- consemnarea prezentei elevilor
- verificarea aspectului general al clasei, existenta buretelui, a cretei

2. **Verificarea temei**

- profesorul verifica tema pentru acasa și corecteaza eventualele greseli
- elevii vor preciza dacă sunt exercitii neefectuate, iar acestea vor fi lucrate la table

3. **Anuntarea noii teme**

Profesorul anunta titlul noii lectii „Modulul unui număr real”, iar la sfârşitul lecţiei toţi elevii trebuie să fie capabili să cunoasca notiunea de modul.

4. **Dirijarea invatarii**

-pornind de la distanta între doua puncte- intotdeauna se exprima printr-un număr pozitiv, se definește notiunea de modul

Definiție : Fie x un număr real. Definim modulul (valoarea absoluta) a numărului real x, notat $|x|$, astfel: $|x|=\begin{cases} x, daca\ x \geq 0 \\ -x, daca\ x < 0 \end{cases}$

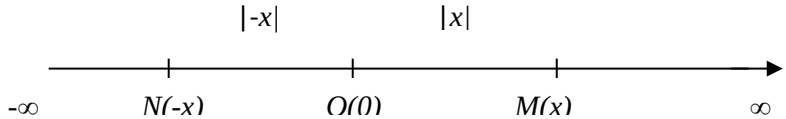
Obs. $|x| = \max(-x, x)$, unde max(-x,x) reprezinta cel mai mare nr. dintre $-x$ și x

Exemple :

$|3|=3$; $|-3|=3$; $|-\frac{3}{7}|=\frac{3}{7}$; $|0|=0$; $|-\sqrt{7}|=\sqrt{7}$

Interpretarea geometrica a modulului unui număr real

Fie x un număr real. Modulul numărului real x reprezinta distantele de la originea O(0) la punctele M(x) și N(-x) de pe axa reala. OM= ON =$|x|$



Propietatile modulului unui număr real:

1. $|a| \geq 0$, $oricare\ a \in \mathbb{R},\ |a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$
2. $|-a| = |a|, oricare\ a \in \mathbb{R}$
3. $|a| \leq c,\ c > 0 \Leftrightarrow -c \leq a \leq c\ ;\ \ |a| \geq c, c > 0\ \Leftrightarrow a \leq -c\ \ sau\ \ a\ \ \geq c$
4. $|a + b| \leq |a| + |b|, oricare\ \ a, b \in \mathbb{R}$
5. $|a - b| \leq |a| + |b|, oricare\ \ a, b \in \mathbb{R}$
6. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|,\ \ oricare\ a, b \in \mathbb{R}$
7. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, oricare\ a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$

5. Fixarea cunostintelor :

Pentru fixarea cunostintelor se rezolva exercitiile de pe fisele de lucru cu explicatiile de rigoare. Profesorul urmareste activitatea elevilor și ofera ajutor acolo unde este nevoie.

6. Evaluarea performantei

Profesorul face aprecieri cu privire la munca elevilor și noteaza elevii care au raspuns.

7. **Asigurarea feed-back-ului**

Tema pentru acasa este reprezentata de exercitiile nerezolvate din fisa.

FIȘĂ DE EXERCIȚII

Modulul unui nr real – clasa a IX-a, M2

1) Explicitati modulele:
   a. $|2x-6|$
   b. $|2x-5|$
   c. $|4x-18|$

2) Determinati numerele reale care verifica expresiile:
   a. $|x|=9$
   b. $|x|=-9$
   c. $|-x|=9$
   d. $|x|=0$
   e. $|x+3|=1$
   f. $|x-1|=2$
   g. $|3-6x|=12$
   h. $|4-x||x-5|=0$
   i. $|4-x||x-5|=-2$
   j. $\frac{|4-x|}{|x-5|}=0$
   k. $\frac{|4-x|}{|x-5|}=2$

3) Rezolvati ecuatiile:
   a. $|2x-3|=|4x-2|$
   b. $|2x+1|-|x-1|=0$
   c. $|x+1|+|2x-3|=3$

4) Determinați numerele reale care verifica inegalitatile:
   a. $|3x-2|\geq 0$
   b. $|3x-2|<0$
   c. $|3x-2|\leq 0$
   d. $|x+1|\leq 2$
   e. $|x+1|\geq 2$

5) Demonstrati că $|x-2|+|x+1|\geq 3,\ oricare\ x\in\mathbb{R}$

6) Demonstrati că $\max(a,b)=\frac{a+b+|a-b|}{2}$, $\min(a,b)=\frac{a+b-|a-b|}{2}$, unde

$\max(a,b)=\begin{cases}a,\ daca\ a\geq b\\ b,\ daca\ a<b\end{cases}$ și $\min(a,b)=\begin{cases}a,\ daca\ a\leq b\\ b,\ daca\ a>b\end{cases}$

Profesor

Cornelia Bășcău

COLEGIUL TEHNIC "LAZĂR EDELEANU", PLOIEŞTI

Proiect didactic

I. COORDONATE DE IDENTIFICARE

Profesor: Băşcău Cornelia
Disciplina: Matematică – algebra
Clasă : a X-a G (M2)
Unitetea de învăţare: Numere reale
Tema : Proprietatile radicalilor
Tipul de lecţie: Lecție de fixare și consolidare a cunoștințelor

II. COMPETENTE SPECIFICE

La finalul lectiei elevii vor fi capabili :
-sa cunoasca definiția radicalului de ordin n dintr-un nr real pozitiv
-sa cunoasca definiția radicalului de ordin n-impar dintr-un nr real negativ
-sa stapaneasca conditiile de existenta ale radicalilor
-sa aplice corect propietatile radicalilor
-sa justifice deducera unor rezultate și sa verifice corectitudinea lor;
-sa-și consolideze deprinderile de rezolvare a exercitiilor/problemelor;
-sa utilizeze corect notatiile și terminologia invatata și sa le aplice în exercitii.

III. STRATEGIA DIDACTICA

Metode și procedee: conversatia, algoritmizarea, exerciţiul, observatia.
Materiale didactice: fişa de exerciţii
Forma de organizare a clasei: activitate frontala combinata cu activitate individuala
Mijloace de evaluare: observatia, aprecierea,
Bibliografie:
-Marius Burtea, Georgeta Burtea, Matematica, culegere pentru clasă a X-a, Editura Carminis, Pitesti, 2005

-Constantin Nastasescu,Constantin Nita, Matematica, Manual pentru clasă a IX-a, Editura Didactica și pedagogica, Bucuresti, 1997
-Mircea Ganga, Manual pentru clasă a IX-a, EdituraMathpress, Bucuresti, 2001

IV. DESFASURAREA METODICA A LECTIEI

1. **Moment organizatoric**

- consemnarea prezentei elevilor
- verificarea aspectului general al clasei, existenta buretelui, a cretei

2. **Verificarea temei**

- profesorul verifica tema pentru acasa și corecteaza eventualele greseli
- elevii vor preciza dacă sunt exercitii neefectuate, iar acestea vor fi lucrate la tabla

3. **Reactualizarea cunostintelor anterioare**

Sunt punctate notiunile teoretice necesare în rezolvarea fisei de lucru care privesc rezolvarea exercitiilor cu radicali de ordin n (n=2 sau 3)

4. **Anuntarea noii teme**

Profesorul anunta continutul ce urmeaza a fi verificat și modul de desfasurare a activitatii

5. **Fixarea și consolidarea cunostintelor**

Pentru fixarea cunostintelor se rezolva exercitiile de pe fisele de lucru cu explicatiile de rigoare. Profesorul urmareste activitatea elevilor și ofera ajutor acolo unde este nevoie

6. **Evaluarea performantei**

Profesorul face aprecieri cu privire la munca elevilor și noteaza elevii care au raspuns.

7. **Asigurarea feed-back-ului**

Tema pentru acasa este reprezentata de exercitiile nerezolvate din fisa.

FISA DE EXERCIȚII

Proprietățile radicalilor – clasă a X-a, M2

1) Stabiliţi domeniul de existenţă pentru:

$\sqrt{2x-1}$; $\sqrt{x^2+1}$; $\sqrt[3]{2x-1}$; $\sqrt[3]{\frac{x}{x+1}}$; $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}$; $\sqrt{x-1}+\sqrt{1-x}$;

$\sqrt{x^2-1}$

2) Să se calculeze:

$\sqrt{3^4}\cdot\sqrt{3^2}$; $\sqrt{3^4}:\sqrt{5^4}$; $\frac{\sqrt[4]{2}\sqrt[3]{64}}{\sqrt{8}}$; $\sqrt[10]{32}\cdot\sqrt[12]{2^6}$; $\sqrt[18]{3^{12}}$ $\sqrt[9]{3^6}$

3) Să se calculeze:

$\sqrt{\frac{121}{144}}$; $\sqrt[15]{125^5}$; $\sqrt[10]{2^5}$

$\sqrt[10]{x^{10}}$; $\sqrt[9]{x^9}$; $\sqrt[4]{x^2}$

$\sqrt[4]{(1-\sqrt{2})^2}$; $\sqrt[4]{(3-\sqrt{10})^2}$; $\sqrt[9]{(\sqrt{2}-\sqrt{5})^3}$; $\sqrt[6]{(2-\sqrt{5})^2}$

4) Să se introducă sub radicali factorii:

$5\sqrt{2}$; $5\sqrt[3]{2}$; $-2\sqrt[3]{-12}$; $-2\sqrt{12}$; $\frac{2}{3}\sqrt[3]{12}$

5) Să se scoată factori de sub radicali:

$\sqrt{48}$; $\sqrt[3]{375}$; $\sqrt[4]{243}$; $\sqrt[3]{-686}$; $\sqrt{\frac{a^{12}}{b^{10}}}$; $\sqrt[3]{\frac{b^{12}}{a^9}}$; $\sqrt{\frac{a^{13}}{b^{10}}}$; $\sqrt[3]{\frac{b^{14}}{a^9}}$

6) Să se calculeze: $\sqrt{5\sqrt[3]{625}}$; $\sqrt{\sqrt{2}}$; $\sqrt[3]{\sqrt[3]{-3}}$; $\sqrt[5]{2\sqrt[4]{4\sqrt[3]{8}}}$;

7) Sa se raționalizeze:

$\frac{1}{2\sqrt{5}}$; $\frac{5}{\sqrt{2}-1}$; $\frac{2}{\sqrt{3}+2}$; $\frac{5}{3\sqrt{2}-1}$; $\frac{4}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$; $\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$; $\frac{18}{2\sqrt{5}-\sqrt{2}}$; $\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}}$;

$\frac{3}{5\sqrt[3]{2}}$; $\frac{2}{\sqrt[3]{9}}$; $\frac{51}{\sqrt[3]{2}-1}$; $\frac{1}{\sqrt[3]{2}+2}$; $\frac{12}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}}$; $\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$; $\frac{2}{1+2\sqrt[3]{5}}$; $\frac{1}{\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{9}}$; $\frac{1}{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}}$;

Bibliografie

- Dumitru Bușneag, Florentina Boboc, Dana Piciu, Aritmetică și teoria numerelor , Editura Universitaria, Craiova 1999.
- Ion Colojoara, Analiză Matematică, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1983
- Constantin Meghea, Bazele analizei matematice, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1977
- Radu Miculescu, Analiză matematică: note de curs, Editura Universității din București, 2010
- Constantin Năstăsescu, Constantin Niță, Matematică, Manual pentru clasă a IX-a, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1997
- Walter Rudin, Principles of Mathematical Analysis, McGraw-Hill Book Company, 1964
- Octavian Stănașilă, Analiză Matematică, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1981
- Colectiv al catedrei de analiză matematică a Universității București (M. Nicolescu, S. Marcus, N. Dinculescu), Analiză matematică, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1980

http://www.edu.ro/index.php/articles/c556/

http://mate.info.ro/Materials.aspx?Categ=1

http://mate.info.ro/Materials.aspx?Categ=1

http://www.isjsalaj.ro/discipline/matematica/gimnaziu/matematica_5-8.pdf

http://ro.wikipedia.org/wiki/